Ni más ni menos que adición y sustracción

7 2

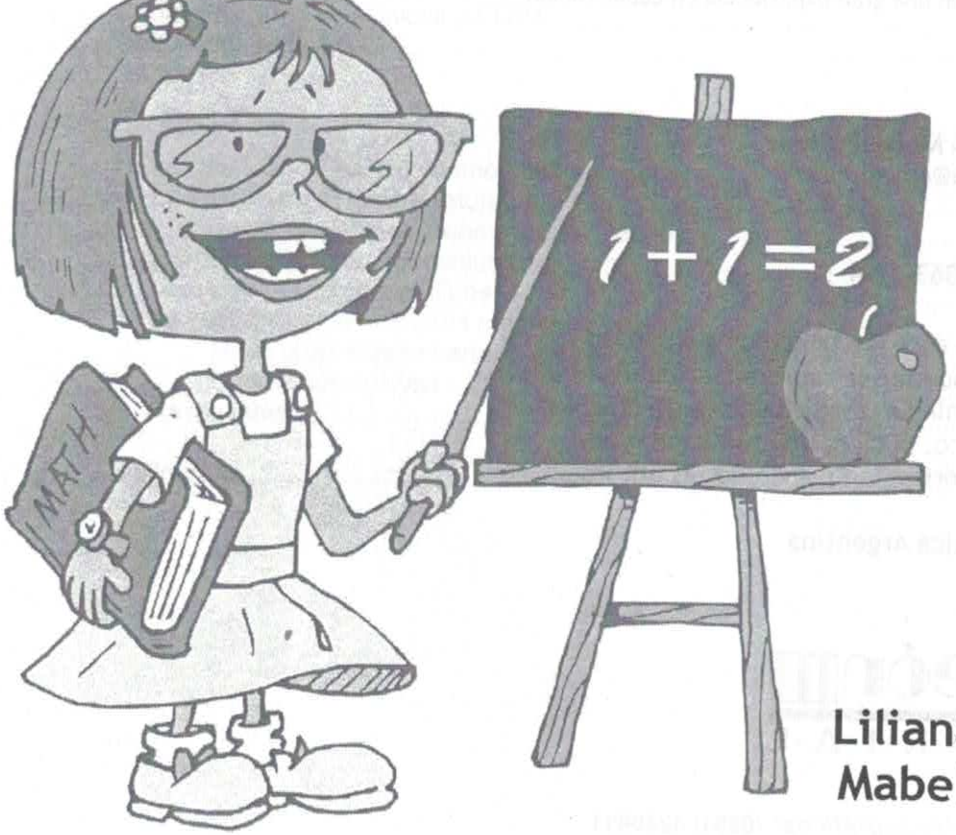
Con propuestas para el aula
Dirigido a:
Docentes de Nivel Inicial,
EGB1 y EGB2
Docentes y alumnos de Profesorados

9+5

Liliana Eguiluz
Mabel Pujadas

Ni más ni menos que adición y sustracción

Con propuestas para el aula
Dirigido a:
Docentes de Nivel Inicial, EGB1 y EGB2
Docentes y alumnos de Profesorados



Liliana Eguiluz
Mabel Pujadas

Mabel Pujadas
- Maestra Normal Nacional egresada de la Escuela Normal N°4 "E. S. Zeballos"
- Profesora de Matemática egresada de la Universidad de Bs. As.

Se ha desempeñado como docente
- en los niveles primario, secundario, terciario y universitario
- con amplia trayectoria en Didáctica de la Matemática.

Ha sido integrante:
- del grupo de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba
- del Equipo Central del PROINTEC
- del Equipo de Curriculum de Matemática de la Dirección de Planificación y estrategias Educativas del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba

Liliana Eguiluz
Profesora de Matemática, Física y Cosmografía egresada del Instituto Católico de Profesorado.

Se ha desempeñado como docente
- en los niveles secundario y terciario
- con amplia trayectoria en Didáctica de la Matemática y en Práctica de la Enseñanza, en institutos Superiores de la Ciudad de Córdoba. Ha sido integrante
- del equipo de Matemática de la Dirección de Investigaciones e innovaciones Educativas
- del Equipo Central del PROINTEC
- del Equipo de Curriculum de Matemática de la Dirección de Planificación y Estratégias Educativas

todos del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Ambas profesoras han publicado, en forma conjunta, artículos referidos a la enseñanza de la Matemática en revistas de educación actuales y los libros:
- Fracciones ¿un quebradero de cabeza?
- La Geometría, esa gran olvidada...
- Numeración ¿querés que te cuente?
- Quinto.m@te (para 5° EGB)
- Sexto.m@te (para 6° EGB)

Asimismo cuentan con una gran experiencia en capacitación docente.

E-mail: solvencia@argentina.com

ISBN: 978-987-9363-32-4

Córdoba - República Argentina

galeón
E-D-I-T-O-R-I-A-L

Impreso en solucionesgráficas® (0351) 4240611

Índice

¿Qué le proponemos?

Una vez más llegamos a usted, docente de EGB o estudiante del Profesorado.
Le proponemos que trabaje con este libro de la misma forma que lo propusimos en

- Fracciones, ¿un quebradero de cabeza?- Editorial Galeón (1998) y Ediciones Novedades Educativas (2000)
- La geometría... esa gran olvidada – Editorial Galeón (2002)
- Numeración. ¿Querés que te cuente? – Editorial Galeón (2004)

Comience por resolver problemas que le servirán de punto de partida para el desarrollo de las temáticas a tratar y le permitirán conocer dónde está Ud. en cuanto al saber numeración. En la tercera parte desarrollaremos lo concerniente a la adición y sustracción como conocimiento a enseñar. En el cuarto capítulo incluimos varias propuestas para el aula con los correspondientes análisis didácticos que lo ayudarán en el momento de la implementación. El "saber sabio" es motivo de estudio con la profundidad que creemos necesaria para su tarea y que le permitirá salvar algunas dudas que frecuentemente manifiestan tener los maestros.

Pretendemos que este libro le resulte sumamente ameno y provechoso, que lo use como material de estudio y de capacitación docente.

Agradecemos a las profesoras Ana María García, Clara Iglesias y Ana Karina Peña por sus aportes como así también al equipo directivo y docente del Colegio San José.
Gracias a nuestros esposos, hijos y sobrinos que nos apoyaron incondicionalmente.
Gracias a Carlos Pujadas y familia por facilitar nuestra tarea.

Liliana Eguiluz
Mabel Pujadas

Para comenzar, juegos y problemas

Para comenzar, juegos y problemas

Una vez más iniciamos el tratamiento de un contenido con algunos juegos y problemas. Pensamos que con ello lograremos, desde un comienzo, ponerlo en contacto con la propuesta que le acercamos. Necesitamos que "viva" cada situación para compenetrarse de la misma y acompañarnos en el posterior análisis.
Le recomendamos que proceda a resolver los problemas en forma individual o grupal. Esta última forma de trabajo es más conveniente pues le permitirá escuchar las opiniones de sus compañeros como así también un control sobre sus acciones y esto redundará en un mayor aprovechamiento de la actividad.

Campeonato categoría "Pollito"[1]

Para este juego necesitaremos

* tres dados
* una ficha para cada jugador
* tablero siguiente

Reglas del juego

- Formen grupos de 4 integrantes. Cada grupo estará formado por dos equipos de dos integrantes cada uno.
- En cada equipo uno será jugador y su compañero, árbitro del equipo contrario.
- Cada jugador coloca sus fichas en la "SALIDA".
- Por turno tiran los dados y suman o restan los números obtenidos, según crean conveniente. El número obtenido deberá corresponder a una casilla vecina (adelante, a la izquierda, a la derecha o en diagonal). En caso de que no lo sea, no podrá avanzar.
- Se puede decidir en alguna jugada no avanzar.
- Cada árbitro se encargará de tomar nota de los cálculos realizados por el jugador del equipo contrario y de los movimientos en el tablero, advirtiendo al jugador en caso de un error. Cada tres errores, se descontará un gol.
- Cada vez que hacen **"cesto"**, cuentan un gol y vuelven a la SALIDA.
- Gana quien hace tres goles.

¡ Ahora a jugar! ...

[1] Eguiluz,L.; Pujadas,M. - Quinto.m@te. Editorial Grafos XXI. Año 2.000.

Tablero A

SALIDA

15	7	0	18	3	14	5	7	19	8	2	9
13	14	5	1	8	7	6	15	4	3	2	10
4	5	16	7	9	3	8	11	2	4	13	5
7	9	18	5	7	6	3	15	14	8	9	7
11	6	17	5	8	18	6	2	7	8	14	3
2	1	6	17	9	16	4	3	12	0	5	8

☺☺ ¿Qué tal le fue?. ¿Disfrutó del juego?. Ya sea que haya ganado o perdido no viene ma un poco de reflexión. Converse con sus compañeros de juego acerca de qué cálculos propusieron ante cada terna de números y si les hizo falta plantear <u>todas</u> las combinaciones posibles.

Si ya jugó, veamos qué respondió

☺¿Han disfrutado jugando?. ¿Cuáles fueron nuestros objetivos al presentarles estos juegos?.

Usted habrá advertido que, al arrojar los tres dados y leer sus puntajes, debió enfrentar dos desafíos para lograr "salir":

- ✓ Dados tres números, conseguir todos los cálculos diferentes que involucren dichos números y las operaciones de adición y sustracción.
- ✓ Resolver dichos cálculos. Descontamos que los realizó mentalmente.

Con respecto al primero de los desafíos, comenzaremos por analizar algunos casos. Supongamos que obtuvieron los números **2,4,5.** Las posibles combinaciones son

2,4,5	4,2,5	5,2,4
2,5,4	4,5,2	5,4,2

que podemos combinar sumando o restando. Sólo para la adición resultarán

2+4+5	4+2+5	5+2+4
2+5+4	4+5+2	5+4+2

¡Ya estamos escuchando su queja...!
-No hace falta plantear todas esas sumas. Todas dan el mismo resultado.
Tiene razón.

☺ ¿Qué propiedades tiene la adición de números naturales que asegura lo que ustedes dicen?

La <u>igualdad de los resultados</u> se basa en dos propiedades:

- ✓ asociativa
- ✓ conmutativa

☺ ¿Qué dice cada una de ellas?

Propiedad asociativa de la adición

Puesto que la adición de números naturales es una operación binaria interna con propiedad de cierre (*no se asuste...*), es decir que a cada par de números naturales le asigna otro número natural sólo podemos sumar "de a dos números".

$$(3,4) \xrightarrow{\quad + \quad} 7$$

o también $3 + 4 = 7$

Entonces..., ¿cómo puede ser que estemos sumando tres números?. Justamente, la propiedad asociativa dice que dados tres números naturales cualesquiera (a los que llamaremos a, b, c), da el mismo resultado

- ✓ sumar **a** con **b** y a ese resultado sumarle **c** que
- ✓ sumar **a** con la suma de **b** y **c**

Expresado simbólicamente:

$$\forall\, a, b, c \in N_0 : (a + b) + c = a + (b + c)$$

Con esta propiedad justificamos la quita de los paréntesis pero no justificamos el cambio en el orden de los sumandos. Para ello hace falta otra propiedad.

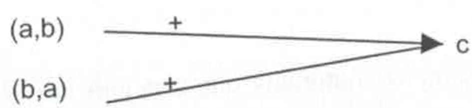
Para afianzar

1. Complete las igualdades aplicando <u>solamente</u> la propiedad asociativa de la adición y verifique la igualdad de los resultados:

a. 13 + (25 + 7) =
b. (56 + (7 + 60)) + 23=
c. 85 x 6 + (4+7) =
d. 37 + (8 + 72 : 9) =
e. (34 + 0)+ 231 x (8 x 0) =

Propiedad conmutativa de la adición

La propiedad que justifica el cambio en el orden de los sumandos es la propiedad conmutativa. Dice esta propiedad que dados dos números naturales cualesquiera **a** y **b**, tanto al par ordenado (**a**,**b**) como al par ordenado (**b**,**a**), les corresponde (por la adición), el mismo número natural **c**.



Expresado simbólicamente:

$$\forall\, a, b \in N_0 : a + b = b + a$$

<u>Observaciones:</u>

✓ Quitar los paréntesis es consecuencia de la propiedad asociativa pero no quiere decir que sumemos los tres números a la vez sino que cualquiera sea la forma de asociar de a dos los sumandos obtendremos el mismo resultado.

✓ Alterar el orden de los términos de una operación da el mismo resultado si la operación tiene la propiedad conmutativa y esta propiedad es de <u>algunas</u> operaciones como la adición y multiplicación de números.

Para afianzar

2. Complete las igualdades aplicando <u>solamente</u> la propiedad conmutativa de la adición y verifique la igualdad de los resultados:

a. 13 + (25 + 7) =
b. (56 + (7 + 60)) + 23 =
c. 85 x 6 + (4+7) =
d. 37 + (8 + 72 : 9) =
e. (34 + 0)+ 231 x (8 x 0) =

Retomemos el ejemplo inicial. Las posibles combinaciones son

2,4,5	4,2,5	5,2,4
2,5,4	4,5,2	5,4,2

pero ya vimos que sólo nos interesa una forma si usamos únicamente la adición. ¿Qué sucederá si usamos la adición primero y la sustracción después?. Las opciones son:

2+(4–5)	4+(2–5)	5+(2–4)
2+(5–4)	4+(5–2)	5+(4–2)

Por tratarse de números naturales eliminamos las que tienen el sustraendo mayor que el minuendo. Así quedan:

2+(5–4)	**4+(5–2)**	**5+(4–2)**

En caso de "correr los paréntesis":

(2+4)-5	(4+2)-5	(5+2)-4
(2+5)-4	(4+5)-2	(5+4)-2

y por la propiedad conmutativa de la adición quedan

(2+4) –5	**(5+2) –4**	**(4+5) –2**

Compruebe que no aparecen otros casos si toma primero la sustracción y luego la adición, por lo que sólo resta usar únicamente la sustracción que nos lleva a

2-(4-5)	4-(2-5)	5-(2-4)
2-(5-4)	4-(5-2)	5-(4-2)

Y de éstos, quedan

2–(5–4)	**4– (5–2)**	**5– (4–2)**

En este último ejemplo quedan reflejadas la no asociatividad y la no conmutatividad de la sustracción.

☺ ¿Obtuvo las mismas respuestas?

Propiedad de la existencia del elemento neutro de la adición

Retomemos otro ejemplo. Supongamos que obtuvieron los números **2,6,6.** Las posibles combinaciones son: 2,6,6   6,2,6   6,6,2.
Ya vimos que la adición nos remite a un solo caso: **2+6+6**. La combinación de adición y sustracción nos lleva a **2+(6-6)** y **6+(6-2)** y la sustracción a **6-(6-2).** El primer caso ejemplifica otra propiedad interesante de la adición: la existencia del elemento neutro. La suma de dos números naturales siempre es un número natural diferente de los sumandos dados salvo en el caso del 0. Sumar 0 a un número natural cualquiera da por resultado el mismo número natural.

Expresado simbólicamente:

$$\forall a \in N_0 : a + 0 = 0 + a = a$$

Para afianzar

3. Complete las igualdades aplicando <u>*solamente*</u> *la propiedad del elemento neutro de la adición:*

a. 13 + (25 + 0) =
b. (0 + (7 + 60)) + 23 =
c. 85 x 6 + (0 + 7) =
d. 0 + (8 + 72 : 9) =
e. (34 + 0) + 231 x (8 x 0) =

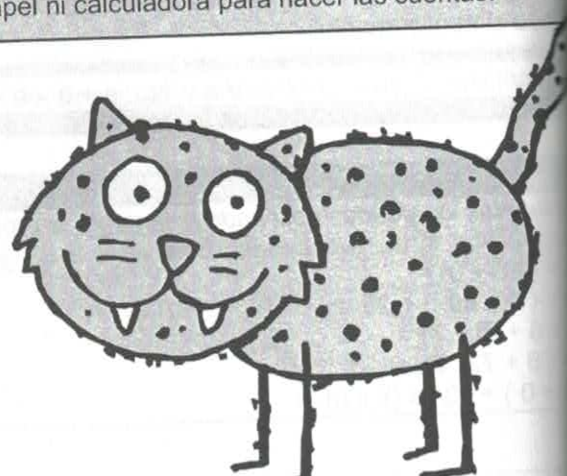
Campeonato categoría "Tigre"[2]

Dispongan uno de los mazos de tarjetas como figuran a continuación pero boca abajo (inicialmente no deben verse los números).
Una vez acomodadas las cartas de esta manera, mezclen el otro mazo de tarjetas. Este será el pozo de donde pueden extraer cartas. Ubíquenlo boca abajo.

Reglas del juego

- Para iniciar el juego se destapa la tarjeta del 50
- Por turno, cada jugador toma una tarjeta de su pozo.
- El juego consiste en sumar o bien en restar al número de la última tarjeta destapada en el tablero, el número obtenido en la carta levantada. La última carta destapada es el resultado de la operación anterior.
- *Por ejemplo, si la primera vez sacaron el número 22, pueden optar entre 50+22 ó 50-22. Una vez que eligieron, por ejemplo 50+22=72, dan vuelta la tarjeta 72 en el tablero. El próximo jugador usa dicho resultado sobre el que suma o resta.*
- Se juega en dos tiempos: en el primer tiempo se convierte un gol cuando dicho resultado corresponde a un número comprendido entre 50 y 100. En el segundo tiempo se convierte un gol cuando dicho resultado corresponde a un número comprendido entre 0 y 50.
- Será ganador quien haga tres goles en cada tiempo.
- Se pasa al segundo tiempo una vez que se hayan hecho tres goles.
- Destapar una carta equivocada es un gol en contra.
- No está permitido el uso de lápiz y papel ni calculadora para hacer las cuentas.

¡ Ahora a jugar!...



[2] Eguiluz,L.; Pujadas,M. - Quinto.m@te. Editorial Grafos XXI. Año 2.000.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

☺☺ Esta vez, ¿perdió o ganó? ¿Cómo hizo todos los cálculos?, ¿de memoria o recurrió a alguna técnica particular?. ¿Qué estrategias de cálculo usó?. Escríbalas.
Haga un listado de los cálculos que supo de memoria y compare con los de sus compañeros. ¿Hay diferencias?

Si ya jugó, veamos qué respondió

Seguramente algunos cálculos los resolvió directamente recurriendo a resultados ya memorizados. Imaginamos que 73+1, 10+7, 50+40, 70+30 son cálculos de esta clase mientras 47+89, 54+36, 46+68 son cálculos en los que se usan diversas estrategias para llegar a sus resultados.
Todos ellos se basan en el conocimiento de las llamadas **combinaciones aditivas básicas**.

Se consideran como combinaciones aditivas básicas las adiciones de dos sumandos cuya suma es igual o menor que 20. Su dominio constituye una de las bases del cálculo mental y escrito correspondiente a la operatoria aritmética. Al término del Primer ciclo de la Educación General Básica es indispensable que todos los alumnos manejen estas combinaciones en forma rápida y segura, sin cometer errores.
El aprendizaje de las combinaciones aditivas básicas requiere de bastante tiempo, dedicado a actividades que aseguren la conceptualización y posteriormente, la asimilación de éstas.

G. Gálvez, S. Navarro, M. Riveros, P. Zanocco
Vida, números y formas

La memorización de las combinaciones aditivas básicas es necesaria tanto para el cálculo mental como para el cálculo algorítmico.¿Cuántas veces nos quejamos de que nuestros alumnos necesitan recurrir a los dedos o a dibujar palitos y contarlos para resolver cálculos sencillos?. Pero ante esta cuestión, ¿qué ha hecho la escuela por superarlo?. Coincidimos con la Dra. Grecia Gálvez que hace falta un trabajo sistemático y premeditado para que todos los alumnos cuenten con un buen repertorio de sumas memorizadas. Su desarrollo y adquisición será planificado en dos etapas sucesivas llamadas de conceptualización y de asimilación.

Conceptualización de las combinaciones aditivas básicas

En esta etapa los alumnos podrán hallar los resultados de las combinaciones aditivas básicas apoyándose en materiales concretos. Tanto se resolverán cálculos de dos o tres sumandos como se expresarán los números del 0 al 20 en forma de sumas y restas con especial atención a las sumas de resultado 10.

Asimilación de las combinaciones aditivas básicas

En el Campeonato categoría "Pollitos" seguramente usted apeló a su repertorio de sumas memorizadas que hizo innecesarios el papel y lápiz o la calculadora. Trate de recordar ¿cómo logró memorizar tales sumas?, ¿habrá sido por mera repetición o apelando a propiedades que facilitaron tal memorización?. Si sucedió esto ¿en qué se apoyó? Pensemos en las sumas de números dígitos bajo el soporte de una tabla de doble entrada y estudiemos algunas interesantes propiedades.
Investigaciones realizadas por diversos autores dan cuenta de la memorización precoz de las sumas de dobles (sumas de la forma **a+a** con **a** dígito, por ejemplo 4+4, 7+7,) y de las sumas con uno de sus sumandos **1** y **0** (sumas de la forma **a+1** y **a+0**, por ejemplo 3+1, 8+0 resaltadas en negrita en la tabla. La obtención del resultado de **a+1** se apoya en la propiedad $\forall a \in N_0$: **a+1 = sig a** y el resultado de **a+0** en la propiedad del elemento neutro de la adición

+	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0	**0**	**1**								
1	**1**	**2**								
2	**2**	**3**	**4**							
3	**3**	**4**		**6**						
4	**4**	**5**			**8**					
5	**5**	**6**				**10**				
6	**6**	**7**					**12**			
7	**7**	**8**						**14**		
8	**8**	**9**							**16**	
9	**9**	**10**								**18**

Combinando las sumas anteriores aparecen los dobles más uno cuyo resultado consiste en hallar el siguiente del doble del menor. Por ejemplo: 7+8 = (7+7)+1 = sig 14 = 15. Esto agrega las siguientes sumas:

+	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5						
3	3	4	5	6	7					
4	4	5		7	8	9				
5	5	6			9	10	11			
6	6	7				11	12	13		
7	7	8					13	14	15	
8	8	9						15	16	17
9	9	10							17	18

La propiedad conmutativa incrementa el completamiento de la tabla. Otra interesante propiedad es la que se enuncia así: *la suma del anterior y el siguiente de un número natural es igual al doble de tal número*. Ejemplo: 6+8 = 7+7. En símbolos:
$\forall a \in N_0$: **ant a + sig a = a+a.**

☺¿Se anima lector a demostrarla?

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6					
3	3	4	5	6	7	8				
4	4	5	6	7	8	9	10			
5	5	6		8	9	10	11	12		
6	6	7			10	11	12	13	14	
7	7	8				12	13	14	15	16
8	8	9					14	15	16	17
9	9	10						16	17	18

Los complementos aditivos a 10 como por ejemplo: 1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5 ... son muy importantes pues sobre ellos se basan propiedades de cálculo muy útiles.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6				10	
3	3	4	5	6	7	8		10		
4	4	5	6	7	8	9	10			
5	5	6		8	9	10	11	12		
6	6	7			10	11	12	13	14	
7	7	8		10		12	13	14	15	16
8	8	9	10				14	15	16	17
9	9	10						16	17	18

Vemos en la tabla que la memorización no depende del tamaño de los números. Otras su[...] que rápidamente forman parte del repertorio memorizado son aquéllas que tienen por uno[...] sus sumandos a 10 ya que descansan en propiedades del sistema de numera[...] Ampliemos nuestra tabla con ellas.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6				10		12
3	3	4	5	6	7	8		10			13
4	4	5	6	7	8	9	10				14
5	5	6		8	9	10	11	12			15
6	6	7			10	11	12	13	14		16
7	7	8		10		12	13	14	15	16	17
8	8	9	10				14	15	16	17	18
9	9	10						16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Terminamos este estudio con la propiedad que afirma que sumar 9 equivale a sumar 10 y tomar el antecesor de dicho resultado.

☺ Lo invitamos a escribir y probar dicha propiedad.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6				10	11	12
3	3	4	5	6	7	8		10		12	13
4	4	5	6	7	8	9	10			13	14
5	5	6		8	9	10	11	12		14	15
6	6	7			10	11	12	13	14	15	16
7	7	8		10		12	13	14	15	16	17
8	8	9	10				14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

¡Qué poco queda ya!. Sumar 2 como el siguiente del siguiente completa aún más la tabla.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8		10		12	13
4	4	5	6	7	8	9	10			13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12		14	15
6	6	7	8		10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10		12	13	14	15	16	17
8	8	9	10				14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Retomando los complementos a 10 podemos usarlos junto con la propiedad asociativa para calcular, por ejemplo, 8+3 haciendo 8+3 = 8+(2+1) = (8+2)+1 = 10+1.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8		10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8		10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sólo queda 3+6 cuyo cálculo se puede hacer combinando varias de las propiedades citadas anteriormente. *¿Lo hará lector?*

Para afianzar

4. Busque en la Propuesta Curricular para Matemática los contenidos correspondientes a cálculo mental de primero y compare con lo expuesto. ¿Qué conclusión saca?.

Las estrategias de cálculo mental permiten avanzar en la consideración de sumandos mayores que 10. Reaparecen los dobles para algunos casos particulares como 25+25, 45+45, 12+12.
Combinaciones fácilmente memorizables son las que involucran los múltiplos de 10, **a+10**; **a+20**; **a+30**... con **a** dígito. Ejemplos de éstos son 8+10; 5+20, 9+50, 70+6....

A partir de un doble

- ✓ 25 + 26 = 51 *porque 25 + 25 = 50 y le agregué 1*
- ✓ 12+11 = 23 *porque 12 + 12 = 24 y le saqué 1*
- ✓ *45+47 = 92 porque 45 + 45 = 90 y le agregué 2*

A partir de sumar una potencia natural de 10

- ✓ 23 + 99 = 122 porque 100 + 23 = 123 y le saqué 1
- ✓ 18 + 98 = 116 porque 100 +18 = 118 y le saco 2

Buscando formar múltiplos de 10 a partir de la descomposición de uno de los sumandos

- ✓ 4 + 9 = 10 + 3 = 13 porque al 9 le sumo 1 y tengo 10, faltan sumar 3 que quedan del 4, 10 + 3 = 13
- ✓ 8 + 5 = 10 + 3 = 13 porque al 8 le pongo 2 y son 10, y 3 que sobran del 5, 13
- ✓ 14 + 9 = 10 + 13 = 23
- ✓ 23 + 99 = 100 + 22 = 122
- ✓ 14 + 19 = 33 porque 14 + 20 = 34 y le saqué 1
- ✓ 23 + 399 = 422 porque 400 + 23 = 423 y le saqué 1
- ✓ 18 + 798 = 816 porque 800 +18 = 818 y le saco 2

Por descomposición de ambos sumandos

- ✓ 24 + 26 = 20 + 20 + 4 + 6 = 40 + 10 = 50
- ✓ 37 + 18 = 40 + 15 = 55
- ✓ 155 + 945 = 45 + 5 + 50 + 1.000 = 100 + 1.000 = 1.100

También sumar potencias naturales de 10 como 100, 1.000, etcétera no requiere esfuerzo de memorización y da lugar a otras estrategias. Simbólicamente **$a+10^n$ con a, n $\in$ N.**

Por compensación

- ✓ 5 + 8 = 13 porque ya sé que 4 + 9 = 13 (" a 4 le puse 1 y a 9 le saqué 1")
- ✓ 24 + 26 = 50 porque 25 + 25 = 50 (" a 24 le sumo 1 y a 26 le resto 1")
- ✓ 106 + 148 = 254 porque 104 + 150 = 254 ("a 106 le saco 2 y se los pon

También para la sustracción existen estrategias de cálculo.

A partir de un doble

- ✓ 10 – 5 = 5 porque 5 + 5 = 10
- ✓ 7 – 4 = 3 ("4 + 4 = 8, me pasé por 1 ...4 + 3 = 7")
- ✓ 250 – 125 = 125 porque 125 + 125 = 250
- ✓ 250 – 123 = 127 (" si 125 + 125 = 250 entonces 123 + 127 = 250")

Como se verá esta estrategia es sencilla para los dos primeros casos; es bastante compleja en el tercer ejemplo y no simplifica los cálculos como las otras estrategias.

Hacer 10, 20, ..., 100, 200,... etc. el sustraendo

- ✓ 45 – 7 = 38 (45 – 10 es 35 y como saqué 3 de más ahora los agrego. Da 38)
- ✓ 136 – 28 = 108 (136 – 30 = 106. Resté 2 más y ahora los sumo a 106... 108)
- ✓ 548 – 298 = 250 (saco 300 y después le sumo 2 ... 248... 250)

Por compensación y redondeo

- ✓ 26 – 17 = 29 – 20 = 9 (17 + 3 es 20 y 26 + 3 = 29)
- ✓ 148 – 98 = 50 (a 98 le pongo 2 y a 148 también . 150 – 100 = 50)
- ✓ 1.139 – 108 = 1.141 – 110 = 1.031

Por descomposición del sustraendo

- ✓ 15 – 8 = 15 – 5 – 3 = 10 – 3 = 7
- ✓ 46 – 17 = 46 – 16 – 1 = 30 – 1 = 29
- ✓ 386 – 105 = 386 – 100 – 5 = 286 – 5 = 281

Por descomposición del minuendo y el sustraendo

- ✓ 42 – 32 = 10 pues 40 – 30 = 10 y 2 – 2 = 0
- ✓ 486 – 186 = 300 pues 400 – 100 = 300 y 86 – 86 = 0
- ✓ 486 - 147 = ¿? 400 – 100 = 300; 80 – 40 = 40 y 6

no puedo seguir...

- ✓ 486 - 147 = 339 pues 400 – 100 = 300; 70 – 40 = 30

– 7 = 9. Ahora sumamos 300 + 30 + 9 = 339

Para afi

5. *¿Cómo resolvería este último cálculo con alguna de las estrategias ya mencionada*

¿Cómo hacer para que los niños asuman las estrategias de cálculo?. Algunas de ellas utilizadas sin que el maestro "las enseñe" pero condicionadas por los saberes previos cada niño. Las “cuentas” deben ser presentadas como problemas ante los cuales los alumnos deberán desplegar los procedimientos que consideren convenientes para su resolución. Un trabajo posterior de análisis junto con los niños de las distintas formas de resolución pondrá en evidencia variadas opciones. El maestro, según lo crea conveniente, puede agregar alguna otra que considere que puede ser incorporada por ellos.

Mucho para sumar o restar

Efectúe los siguientes cálculos y complete todas las casillas en blanco:

1693	+5 →		+5 →		+5 →		+5 →		+5 →		+5 →	
773	+10 →		+10 →		+10 →		+10 →		+10 →		+10 →	
9886	+25 →		+25 →		+25 →		+25 →		+25 →		+25 →	
9894	-20 →		-20 →		-20 →		-20 →		-20 →		-20 →	
81.069	-50 →		-50 →		-50 →		-50 →		-50 →		-50 →	

☺☺¿Hicieron todas las cuentas o descubrieron alguna forma de anticipar los resultados?.
Si las series tuvieran 100 casillas en blanco, ¿cuál sería el último número?

1693	+9 →		+9 →		+9 →		+9 →		+9 →		+9 →	
773	+11 →		+11 →		+11 →		+11 →		+11 →		+11 →	
9886	-90 →		-90 →		-90 →		-90 →		-90 →		-90 →	

☺☺¿Descubrieron alguna forma de anticipar los resultados?
Si las series tuvieran 100 casillas en blanco, ¿cuál sería el último número?

Si ya calculó, veamos qué respondió

1.693 $\xrightarrow{+9}$ 1.702 $\xrightarrow{+9}$ 1.711 $\xrightarrow{+9}$ 1.720 $\xrightarrow{+9}$ 1.729 $\xrightarrow{+9}$ 1.738 $\xrightarrow{+9}$ 1.74

773 $\xrightarrow{+11}$ 784 $\xrightarrow{+11}$ 795 $\xrightarrow{+11}$ 806 $\xrightarrow{+11}$ 817 $\xrightarrow{+11}$ 828 $\xrightarrow{+11}$ 839

9.886 $\xrightarrow{-90}$ 9.796 $\xrightarrow{-90}$ 9.706 $\xrightarrow{-90}$ 9.616 $\xrightarrow{-90}$ 9.526 $\xrightarrow{-90}$ 9.436 $\xrightarrow{-90}$ 9.34

Para no tener que hacer todos los cálculos seguramente se apoyaron en el descubrimiento de regularidades que, además de resultar sumamente ameno, refuerza el conocimiento de las relaciones entre números. En los casos vistos dichas regularidades son:

Primera sucesión

- la cifra de las unidades se alterna entre 3 y 8
- la cifra de las decenas se repite por pares sucesivos aumentando de 1 en 1 y una vez que llega a 9, pasa a 0 incrementando en 1 la cifra de las centenas

Segunda sucesión

- el número decenas aumenta de 1 en 1 permaneciendo constante la cifra de las unidades

Tercera sucesión

- La cifra de las unidades se alterna entre 6 y 1
- El número de centenas permanece constante cada cuatro términos y se incrementa de 1 en 1
- Cada cuatro términos de la sucesión se repiten las cifras de las decenas y unidades

Cuarta sucesión

- La cifra de las unidades siempre es 4
- El número de centenas aumenta de 2 en 2

Quinta sucesión

- La cifra de las unidades es siempre 9
- La cifra de las decenas se alterna entre 1 y 6
- El número de centenas se repite cada dos términos y decrece de 1 en 1

Las regularidades descubiertas nos permiten anticipar cuáles serán los números de centésima casilla. En el caso de la primera sucesión y por tratarse de un número par casilla la cifra de las unidades es 8. El número de decenas podemos calcularlo así:

Casillas 1 y 2 corresponden a 169 decenas
Casillas 3 y 4 corresponden a 170 decenas
Casillas 5 y 6 corresponden a 171 decenas
Casillas 7 y 8 corresponden a 172 decenas
Casillas 9 y 10 corresponden a 173 decenas
Casillas 11 y 12 corresponden a 174 decenas
Casillas 13 y 14 corresponden a 175 decenas
Casillas 15 y 16 corresponden a 176 decenas y así siguiendo

Vemos que la cantidad de decenas es la misma para cada casilla de orden par y su anterior y está dada por la fórmula 168 + n/2 donde n es el número de casilla par. Por lo tanto la casilla 100 estará ocupada por 2188. Otra alternativa más económica es sumar 99 veces 5 al número inicial:
1693 + 99x5 = 2188
Las respuestas para las demás sucesiones son: 1.763, 12.361, 7.014 y 6.119. Pasemos a las restantes sucesiones
En la primera sucesión crece la cifra de las decenas (salvo de 1711 a 1720) y decrece la cifra de las unidades de 1 en 1.
En la segunda sucesión crece de 1 en 1 tanto la cifra de las decenas como la cifra de las unidades.
En la tercera sucesión la cifra de las unidades es siempre 6 mientras que la cifra de las decenas decrece de 1 en 1 salvo de 9796 a 9706.
Las casillas número 100 de cada sucesión llevan los números 1891, 1862 y 7906.

¿Qué hacer con los alumnos?
Tanto en adición como en sustracción podemos citar casos donde las estrategias usadas no son procedimientos de cálculos sino de conteo hacia adelante o hacia atrás. Esta estrategia es usada cuando no hay dominio de estrategias de cálculo reflexionado, y se sigue usando en casos donde, aún conociendo las estrategias de cálculo reflexionado, su aplicación es más rápida y simple. Ver escalas en Numeración, ¿querés que te cuente? (L. Eguiluz, M. Pujadas)

Ejemplos:
* 453 + 26 *__453__, 463, 473+ 6 = 479*
* 73 – 47 → **73**, 63, 53, 43, 33 – 7 = 30 – 4 = 26
→ **47**, 57, 67, van 20 y 3, 23 (pensando en llegar a 70) y 3, 27 (pensando en llegar a 73)

Para afianzar

6. En "Numeración y cálculo"- Editorial Síntesis (1993), su autor, Bernardo Gómez Alfonso, propone los siguientes nombres para las estrategias de cálculo aditivo:
a) ***recolocación,***
b) ***descomposición,***
c) ***redondeo por compensación***
d) ***redondeo por conservación añadiendo,***
e) ***redondeo por conservación quitando,***
f) ***conteo ascendente***
g) ***conteo descendente.***
Dé dos ejemplos más de cada uno de ellos, describa el procedimiento general e indique en qué propiedades de la adición y sustracción de números naturales se fundamentan.

a) ¿Qué dos términos le convendría sumar inicialmente para hallar el resultado?
- 4 + 25 + 17+ 35 =
- 137 + 723 + 36 + 64 =

b) Describa el procedimiento general de la siguiente estrategia
- 68 + 135 = 60 + 130 + 8 + 5
- 137 + 86 = 100 + 30 + 80 + 7 + 6

c) También hemos visto sumar así.
- 68 + 135 = 70 + 133
- 58 + 47 = 61 + 50

d) Hemos visto restar así.

- 137 – 86 = 141– 90
- 137 – 86 = 140 – 89

e) Otra forma de restar.

- 145 – 78 = 140 – 73
- 346 – 65 = 341 – 60

f) Otra forma de sumar o restar.

- 346 + 176 = 522 pues

346 + 100 = 446
446 + 70 = 516
516 + 6 = 522

- 437 – 72 = 365 pues

72, 172, 272, 372 (son 300)
372, 382, 392, 402, 412, 422, 432 (son 60)
432 + 5 = 437

g) También se puede restar así:

- 437 – 72 = 365 pues .

437, 337, 237, 137 (son 300)
137, 127,117, 107, 97, 87, 77 (son 60)
77 – 5 = 72

7. Resuelva este problema proponiendo estrategias de cálculo mental.
Los alumnos del último curso de una escuela buscaron una forma de recaudar fondos para su viaje sin tener que apelar a las rifas. Tomaron 99 sobres y en cada uno de ellos pusieron una tarjeta con diferente contenido. En cada tarjeta escribieron un número del 1 al 99. Decidieron vender todos los sobres a un mismo precio. El comprador, una vez abonado el valor del sobre, recibiría tanto dinero como indicaba el número de la tarjeta en su interior. Suponiendo que vendieran todos los sobres, que quisieran ganar más de $400 y que desearan que hubiera más de 40 ganadores
a) ¿a cuánto deberían vender cada sobre?,
b) ¿cuántos sobres ganadores habría?,
c) ¿cuánto ganarían exactamente?.

Algoritmo, ¿hay uno solo?

Los siguientes cálculos han sido realizados con distintas técnicas algorítmicas. Elabore un instructivo con los pasos a seguir para cada uno de los tres modelos presentados y envíeselo a un compañero para que éste descubra a qué algoritmo corresponde.

☺☺¿Qué ventajas presenta cada uno de ellos?

❶

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 21\ } \\ 672 \\ +\ \ 89 \\ \underline{166} \\ 927 \end{array}$$

❷

$$\begin{array}{r} 672 \\ +\ \ 89 \\ \underline{166} \\ 700 \\ +\ 210 \\ \underline{17} \\ 900 \\ +\ \ 20 \\ \underline{7} \\ 927 \end{array}$$

❸

$$\begin{array}{r} 672 \\ +\ \ \cancel{89} \\ \underline{1\cancel{66}} \\ 927 \end{array}$$

❹

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ 16\ \ } \\ \cancel{6}\,\cancel{7}\,{}^{1}2 \\ -\ \ 8\ 9 \\ \hline 5\ 8\ 3 \end{array}$$

❺

$$\begin{array}{r} 6\ \ 7\ \ 2 \\ -\ \ {}^{1}\ \cancel{8}^{9}\,9 \\ \hline 5\ \ 8\ \ 3 \end{array}$$

Compare su instructivo con los nuestros

❶

- ✓ Calcular 2 + 9 + 6 = 17
- ✓ Colocar el 7 debajo de las cifras de las unidades y el 1 en la parte superior de la columna de las cifras de las decenas
- ✓ Calcular 1 + 7 + 8 + 6 = 22
- ✓ Colocar el 2 debajo de las cifras de las decenas y el 2 en la parte superior de la columna de las cifras de las centenas
- ✓ Calcular 2 + 6 + 1 = 9
- ✓ Colocar el 9 debajo de las cifras de las centenas

❷

- ✓ Sumar los valores relativos de las cifras de las centenas: 600 + 100 = 700
- ✓ Sumar los valores relativos de las cifras de las decenas: 70 + 80 + 60 = 210
- ✓ Sumar las cifras de las unidades: 2 + 9 + 6 = 17
- ✓ Sumar los tres números obtenidos con la misma técnica

❸

- ✓ Calcular 2 + 9 = 11, retener el 1 y tachar el 9. Calcular 1 + 6 = 7
- ✓ Como hay una cifra tachada, sumar 1 + 7 = 8.
- ✓ Seguir con 8 + 8 = 16; retener el 6 y tachar el 8. Seguir con 6 + 6 = 12, tachar el 6.
- ✓ Como hay dos cifras tachadas, sumar 2 + 6 + 1 = 9.

❹
✓ Como la resta 2 – 9 no es un número natural, se hace 12 – 9 = 3, esa decena se le quita a 7 decenas, o sea 7 – 1 = 6.
✓ Como la resta 6 – 8 no es un número natural, se hace 16 – 8 = 8, esa centena se le quita a 6 centenas, o sea 6 – 1 = 5

❺
✓ Por complemento, 9 al 12, 3. Esa decena se le suma a 8, o sea 8 + 1 = 9.
✓ Por complemento, 9 al 17, 8. Esa centena se le suma a 6, o sea 6 + 1 = 7.

El algoritmo ❶ es el algoritmo usual para la adición que nos enseñaron nuestros maestros y que se sigue enseñando en nuestras aulas. Trabaja exclusivamente con las cifras de los números y su comprensión requiere del conocimiento de las propiedades del sistema de numeración escrito. Se basa en las combinaciones aditivas básicas.

672 + 89 + 166 =
por la ley de posicionalidad del sistema de numeración indo arábigo
= (6 centenas + 7 decenas + 2 unidades) + (8 decenas + 9 unidades) + (1 centena + 6 decenas + 6 unidades) =
por las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números naturales
= (6 centenas + 1 centena) + (7 decenas + 8 decenas + 6 decenas) + (2 unidades + 9 unidades + 6 unidades) =
= 7 centenas + 21 decenas + 17 unidades =
por la ley de agrupamiento del sistema de numeración indo arábigo
= 9 centenas + 2 decenas + 7 unidades = 927

El algoritmo ❷ es un algoritmo más ligado a la numeración oral y es más fácilmente comprensible que el anterior pero es más largo que el anterior. También se apoya en el conocimiento de las propiedades de nuestro sistema de numeración escrito y requiere o sólo de la suma de dígitos sino también en la suma de múltiplos de 10.

672 + 89 + 166 =
por la ley de posicionalidad del sistema de numeración indo arábigo

(600 + 70 + 2) + (80 + 9) + (100 + 60 + 6) =
por las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números naturales

(600 + 100) + (70 + 80 + 60) + (2+ 9 + 6) = 700 + 210 + 17 = (700 + 200) + (10 + 10) + 7 = 927

El algoritmo ❸ es un algoritmo poco conocido pero con indudables ventajas ya que sólo requiere de la suma de dígitos.

672 + 89 + 166 =
por la ley de posicionalidad del sistema de numeración indo arábigo

= (6 centenas + 7 decenas + 2 unidades) + (8 decenas + 9 unidades) + (1 centena + 6 decenas + 6 unidades) =
por las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números naturales y por la ley de agrupamiento del sistema de numeración indo arábigo

= (6 centenas + 1 centena) + (7 decenas + 8 decenas + 6 decenas) + ((2 unidades + 9 unidades) + 6 unidades) =

= (6 centenas + 1 centena) + (7 decenas + 8 decenas + 6 decenas) + (11 unidades + 6 unidades) = (6 centenas + 1 centena) + (7 decenas + 8 decenas + 6 decenas) + 1 decena + (1 unidad + 6 unidades)
= (6 centenas + 1 centena) + (7 decenas + 8 decenas + 6 decenas) + 1 decena + (7 unidades)
= (6 centenas + 1 centena) + ((7 decenas + 1 decena) + 8 decenas + 6 decenas) + (7 unidades)
= (6 centenas + 1 centena) + ((8 decenas + 8 decenas) + 6 decenas) + 7 unidades
= (6 centenas + 1 centena) + ((16 decenas) + 6 decenas) + 7 unidades
= (6 centenas + 1 centena) + 1 centena + (6 decenas + 6 decenas) + 7 unidades
= (6 centenas + 1 centena) + 1 centena + 12 decenas + 7 unidades
= (6 centenas + 1 centena) + 1 centena + 1 centena + 2 decenas + 7 unidades
= (6 centenas + 1 centena) + 1 centena + 1 centena + 2 decenas + 7 unidades
= 9 centenas + 2 decenas + 7 unidades = 927

El algoritmo ❹ es el algoritmo usual para la sustracción que también nos enseñaron nuestros maestros y que se sigue enseñando en nuestras aulas. Trabaja exclusivamente con las cifras de los números y su comprensión requiere del conocimiento de las propiedades del sistema de numeración escrito.

672 – 89 =
por la ley de posicionalidad del sistema de numeración indo arábigo

= 6 centenas + 7 decenas + 2 unidades – (8 decenas + 9 unidades)
por las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números naturales y por la ley de agrupamiento del sistema de numeración indo arábigo

= 6 centenas + (7 decenas – 8 decenas) + (2 unidades – 9 unidades)
= 6 centenas + (6 decenas – 8 decenas) + (12 unidades – 9 unidades)
= 6 centenas + (6 decenas – 8 decenas) + 3 unidades
= 5 centenas + (16 decenas – 8 decenas) + 3 unidades

El algoritmo ❺ es un algoritmo para la sustracción que se basa en los complementos y su justificación requiere del conocimiento de otra propiedad de la adición: la propiedad uniforme

672 – 89 =
por la ley de posicionalidad del sistema de numeración indo arábigo

= 6 centenas + 7 decenas + 2 unidades – (8 decenas + 9 unidades)
por las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y ley uniforme

= 6 centenas + (7 decenas – 8 decenas) + (2 unidades – 9 unidades)
= 6 centenas + (7 decenas – 9 decenas) + (12 unidades – 9 unidades)
= 6 centenas + (7 decenas – 9 decenas) + 3 unidades
= 6 centenas -1 centena + (17 decenas – 9 decenas) + 3 unidades
= 5 centenas + 8 decenas + 3 unidades

¿Sorprendidos?. Como vemos, no hay un único algoritmo para sumar ni para restar pero..., ¿qué es un algoritmo?. Es un procedimiento que debe resultar general o sea aplicable a todos los casos, su número de pasos debe ser determinado y debe conducir al resultado exacto.

Para afianzar

8. ¿Es válido este algoritmo? Descríbalo

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 7 \\ +\ 9\ 5\ 8 \\ \hline 1(2+1)(0+1)5 \\ 1\ \ 3\ \ \ 1\ \ 5 \end{array}$$

Respuestas

5. Complete las igualdades aplicando <u>solamente</u> la propiedad asociativa de la adición y verifique la igualdad de los resultados:

a. 13 + (25 + 7) = (13 +25) + 7
verificación: 13 + 32 = 45
38 + 7 = 45

b. (56 + (7 + 60)) + 23 = ((56 + 7) + 60) + 23 = (56 + 7) + (60 + 23)
verificación: (56 + 67) + 23 = 123 + 23 = 146
63 + 83 = 146

c. 85 x 6 + (4+7) = (85 x 6 + 4) +7
verificación: 510 + 11 = 521
514 + 7 = 521

d. 37 + (8 + 72 : 9) = (37 + 8) + 72 : 9
verificación: 37 + 16 = 53
45 + 8 = 53

e. (34 + 0)+ 231 x (8 x 0) = 34 + (0 + 231 x (8 x 0))
verificación: 34 + 0 = 34
34 + (0 + 0) = 34 + 0 = 34

6. Complete las igualdades aplicando <u>solamente</u> la propiedad conmutativa de la adición y verifique la igualdad de los resultados:

a. 13 + (25 + 7) = 13 + (7 + 25) = (7 + 25) + 13 = (25 + 7) + 13
b. (56 + (7 + 60)) + 23 = (56 + (60 + 7)) + 23 =
= ((60 + 7) + 56) + 23 = 23 + ((60 + 7) + 56) = 23 + ((7 + 60) + 56) =
= 23 + (56 + (7 + 60)) = 23 + (56 + (60 + 7))
c. 85 x 6 + (4 +7) = 85 x 6 + (7 + 4) = (7 + 4) + 85 x 6 = (4 + 7) + 85 x 6
d. 37 + (8 + 72 : 9) = 37 + (72: 9 + 8) = (72: 9 + 8) + 37 = (8 + 72: 9) + 37
e. (34 + 0)+ 231 x (8 x 0) = (0 + 34)+ 231 x (8 x 0) = 231 x (8 x 0) + (0+ 34) =
231 x (8 x 0) + (34 + 0)

7. Complete las igualdades aplicando <u>solamente</u> la propiedad del elemento neutro de la adición:

a. 13 + (25 + 0) = 13 + 25
b. (0 + (7 + 60)) + 23 = (7 + 60) + 23
c. 85 x 6 + (0 + 7) = 85 x 6 + 7
d. 0 + (8 + 72 : 9) = 8 + 72 : 9
e. (34 + 0) + 231 x (8 x 0) = 34 + 231 x (8 x 0)

5. 486 – 147 = 486 – 100 – 40 – 7 = 386 – 40 – 7 = 346 – 7 = 339
486 – 147 = 486 – 150 + 3 = 336 + 3 = 379
486 – 147 = 489 – 150 = 339

6. Estrategias de cálculo aditivo

a) ***Recolocación***

- 4 + 25 + 17+ 35 = (25 + 35) + 4 + 17
- 137 + 723 + 36 + 64 = (137 + 723) + (36 + 64)

Se apoya en las propiedades asociativa y conmutativa y consiste en sumar primeramente los términos cuya suma son dieces, cienes, etc.

b) ***Descomposición***
El procedimiento consiste en descomponer aditivamente cada término de la adición en cienes, dieces y unidades.

c) ***Redondeo por compensación***
El procedimiento consiste en sumar a un sumando el mismo número que se resta al otro sumando.

d) ***Redondeo por conservación añadiendo***
El procedimiento consiste en sumar al minuendo el mismo número que se suma al sustraendo

e) ***Redondeo por conservación quitando***
El procedimiento consiste en restar al minuendo el mismo número que se resta al sustraendo

f) ***Conteo ascendente***
El procedimiento consiste en usar las escalas ascendentes de 10 en 10, de 100 en 100, ...

g) ***Conteo descendente***
El procedimiento consiste en usar las escalas descendentes de 10 en 10, de 100 en 100, ...

7. Si quiero que haya más de 40 ganadores el precio debe ser menor que $57.Ojo que ganadores significa recuperar la inversión y quedarse con dinero extra, hey alguien que no pierde ni gana. Para ganar más de $400 cada sobre debería venderse por lo menos a $55.

Precio de cada sobre	Ganancia total
$55	**$495**
$56	**$594**
$57	**$693**

En síntesis el precio debería ser $55 (43 ganadores) o $56 (42 ganadores) o $57 (41 ganadores). Para los cálculos anteriores puedo usar:

- Multiplicar por 99 equivale a multiplicar por 100 y restar el multiplicador
- Sumar los 99 primeros números naturales equivale a sumar 99+1+98+2+97+3+ ...+51+49+50 = 100x49+50 = 4950.

Generalice estas reglas!!!!

8. Este algoritmo es válido y consiste en sumar las cifras de cada uno de los distintos órdenes agrupando las inmediatas para pasar después a sumarlas.

Observación:
Los análisis hechos en este libro a partir de los juegos "Campeonato categoría Pollito" y "Campeonato categoría Tigre" están dirigidos al aprendizaje del lector. Estos juegos, si se aplican en escuela primaria, permiten otro tipo de análisis.

La adición y la sustracción como conocimiento a enseñar

La adición y la sustracción
como conocimiento a enseñar

Contar y calcular sin escritura

El balance de sus bienes, el registro del tiempo transcurrido, las transacciones comerciales y otras actividades de las primeras comunidades enfrentaron a nuestros antepasados a la necesidad de registrar números y resolver problemas aritméticos cuando aun carecían de la escritura. Para representar cada objeto, el procedimiento más elemental fue hacer una marca o muesca con instrumento filoso sobre, por ejemplo, huesos o tablillas. También las manos, con su particular anatomía, constituyeron un modo de registrar y calcular. Dice Georges Ifrah en *Las cifras. Historia de una gran invención*:

> **La mano del hombre, maravilla de movilidad y eficacia, es el más antiguo y el más generalizado de los auxiliares de cuenta y de cálculo empleados por los pueblos a lo largo de los siglos.**

Es admirable descubrir cómo se valió el hombre del cálculo digital. Hacían intervenir la derecha, el centro y la izquierda de cada falange (Según Ifrah los calculadores chinos llegaron así a contar hasta diez millones). Para sumar, restar y también para multiplicar lo hacían doblando o extendiendo los dedos.

Las cuerdas con nudos

Las actividades contables exigían tener registros perdurables que las manos no resolvían. ¿Qué usar para lograrlo?. Para resolver este problema, inicialmente algunas comunidades usaron cuerdas con nudos o montones de guijarros. La versión americana de las cuerdas con nudos fueron los **quipus** incaicos. Los mismos consistían en una cuerda larga de la cual pendían cordeles más finos y de varios colores. Los quipucamayoc eran hombres encargados de confeccionar quipus y de llevar variados registros para la administración inca. Pero no sólo los incas tenían este recurso. Los griegos, los romanos, los árabes, los chinos y algunas comunidades actuales usan cordeles con nudos para registrar y calcular cantidades.

Los ábacos

Otro recurso utilizado para realizar cálculos fue el de los "montones de guijarros". Los guijarros iniciaron el arte del cálculo (en latín, calculus significa piedra pequeña). Las bolas de arcilla se modelaban en variadas formas lo que permitía representar los distintos órdenes (decenas, centenas, etc.) y constituían un registro que aseguraba la lealtad comercial . A su vez, los guijarros agrupados según una determinada base, dieron paso a la invención de los **marcadores con bolas** y los **ábacos**. Tales instrumentos fueron inventados por el hombre a medida que se requerían cálculos con números más grandes y antes de la aparición del sistema indo arábigo. Los ábacos eran tablas separadas en filas o columnas paralelas donde se depositaban los guijarros. Cada línea correspondía a un orden (unidades, decenas, centenas, unidades de mil, etc.). En algunos casos, cada fila o columna se subdividía en dos. De esa forma, en la parte superior se representaban con un guijarro cinco guijarros de la parte inferior. Al llegar a diez guijarros de un determinado orden se canjeaban por uno del orden inmediato de la izquierda. Los cálculos con estos instrumentos exigían habilidad y eran propios de especialistas. Como vemos los ábacos se regían por las reglas de agrupamiento de nuestro sistema indo arábigo pero no bastó esto para que surgiera este sistema en Europa.

La introducción del sistema indo arábigo en la Europa renacentista democratizó el cálculo. Los abacistas, calculadores profesionales del ábaco, se resistieron pues veían peligrar su monopolio pero el sistema demostró sus beneficios y los algoristas, calculistas partidarios del cálculo cifrado de origen hindú, ganaron la batalla.

¿Con qué procedimientos comienza un niño a sumar o restar?

Hemos querido dar una apretada síntesis de los pasos dados por el hombre hasta la creación de los algoritmos de las operaciones. Si ese fue el camino, ¿qué camino sigue el pensamiento de un niño?. ¿Qué saberes va adquiriendo antes de comenzar la escolaridad?, ¿qué aportes deberá hacerle la escuela?.

Gelman y Gallistel (1978) indagaron en niños de 3 a 5 años la capacidad de sumar y restar. Concluyeron que los mismos pueden resolver problemas aditivos sencillos antes de alcanzar la conservación de las cantidades discretas. En su experimento, se ofrecía a los niños una bandeja con, por ejemplo, 3 objetos (número ganador) y a continuación se le presentaba una nueva bandeja pero con 2 objetos. Los niños eran capaces de describir la transformación y hasta de plantear la transformación inversa que les permitiría volver a la bandeja con el número ganador. Estas primeras experiencias quedan condicionadas a los números utilizados que inicialmente deben ser pequeños para lograr la correcta resolución de los problemas. Ante un problema sencillo como el siguiente:

¿Cuántos autitos tiene un nene que tiene 5 autitos rojos y 8 autitos verdes?

¿Qué es lo que hace un niño de los 6 a los 8 años?. Carpenter y Moser (1979, 1982) y Carpenter, Hiebert y Moser (1981) realizaron una investigación sobre cómo resolvían problemas aditivos sencillos (como el anterior) niños de esa edad. Primeramente se indagó acerca de las formas de resolución en niños que recién habían ingresado a primer grado y antes de recibir enseñanza formal en adición y sustracción. El procedimiento más comúnmente empleado fue el **conteo** valiéndose de los dedos o de objetos que representaban los autitos. Primero contaban ambas colecciones por separado, luego las reunían y procedían a contar desde el principio (40%), un 7% recurría al **sobreconteo** a partir del número mayor y otro 7%, a partir del primer número que se presentaba (que siempre era el menor) . También un 7% recurría a **hechos memorizados** (sumas o restas cuyos resultados no requerían del conteo para su obtención) y un 5%, a **hechos deducidos** de los memorizados (por ejemplo, 5+5=10 entonces para hacer 5+8 hago 5+5+3).

Después de seis meses hubo un sustancial avance que se evidenció en la mayor utilización del sobreconteo eligiendo como número de partida el mayor. Los investigadores postularon que el dominio del sobreconteo significa un gran salto en la resolución de problemas aditivos y favorece el acceso a la utilización de los hechos memorizados y deducidos.

Si sólo hay que sumar o restar, ¿todos los problemas tienen el mismo grado de dificultad?

Acabamos de ver cómo los niños pequeños pueden resolver sencillos problemas aditivos (problemas de suma o resta) acudiendo inicialmente al conteo para, con posterioridad, utilizar el cálculo. Sin embargo, ¿son siempre sencillos los problemas aditivos?, ¿en qué radica su sencillez?.

☺☺ *Les proponemos que analicen los siguientes problemas considerando semejanzas y diferencias. Traten de hacer una clasificación de los mismos explicitando los criterios empleados. ¿Presentan todos los problemas aditivos el mismo nivel de complejidad?.*

1. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 2. ¿Cuántos tienen entre las dos?

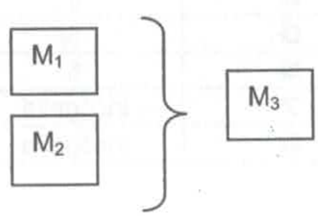
2. Mi amiga y su hermana tienen 7 ositos. Si 2 pertenecen a mi amiga, ¿cuántos tiene su hermana?

3. Mi amiga tenía 5 ositos y le regalaron 2. ¿Cuántos tiene ahora?
4. Mi amiga tenía 5 ositos y perdió 2. ¿Cuántos tiene ahora?
5. Mi amiga tenía 5 ositos y después de la visita de la abuela tiene 7. ¿Qué sucedió en la visita?
6. Mi hermana tenía 5 ositos y después de mudarnos le han quedado 2. ¿Qué sucedió en la mudanza?
7. Después de su cumpleaños mi hermana tiene 7 ositos. Si recibió 2 de regalo, ¿cuántos tenía antes?
8. Después de mudarnos mi hermana tiene 5 ositos. Si durante la mudanza se le perdieron 2, ¿cuántos tenía antes de mudarnos?
9. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 2 ositos más. ¿Cuántos ositos tiene la hermana?
10. Mi amiga tiene 5 ositos y su prima tiene 2 ositos menos. ¿Cuántos ositos tiene la prima?
11. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 7 ositos. ¿quién tiene más ositos y cuántos más?.
12. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 7 ositos. ¿quién tiene menos ositos y cuántos menos?.
13. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron 2 ositos más. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
14. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió 2 ositos. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
15. Mi hermana perdió 3 ositos en la primera mudanza y 2 ositos en la segunda. ¿Cuántos perdió en total?
16. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron algunos ositos más. ¿Cuántos ositos le regalaron si agregó 7 a su colección?
17. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió algunos ositos. ¿Cuántos ositos perdió si sólo agregó 2 a su colección?
18. Mi hermana perdió 5 ositos en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza llevaba perdidos 7 ositos, ¿cuántos perdió en la segunda mudanza?
19. Mi hermana perdió 5 ositos de su colección en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza sólo faltaban 3 ositos de la colección, ¿qué sucedió en la segunda mudanza?
20. Mi hermana tiene 5 ositos más que yo. Si le regalan 2 ositos. ¿Cuántos ositos más que yo tiene ahora?
21. Mi hermana tiene 5 ositos menos que yo. Si mamá le regala algunos ositos y ahora tiene 2 ositos menos que yo. ¿cuántos le regalaron?
22. Le presté 5 ositos a mi hermana y ella me prestó 2 . ¿Cuántos ositos me debe?.

Vemos que todos los problemas presentados involucran cantidades discretas, sus medidas están expresadas por números naturales (que para estos problemas son números pequeños: 2, 3, 5, 7) y para su resolución se requiere efectuar una suma o una resta.
¿Y qué diferencias presentan?. ¿Categorizaron los problemas? ¿Con que criterio lo han hecho? Les proponemos analizar la categorización de problemas del campo conceptual aditivo propuesta por el Dr. Gerard Vergnaud [1] (1976). Siguiendo su propuesta, los problemas presentados pueden ser clasificados en 6 categorías.

Categoría 1

Problemas que involucran dos medidas (M_1, M_2) que se componen para dar lugar a una tercera (M_3). La incógnita puede ser tanto M_1 como M_2 o M_3.



[1] Para mayor profundización ver bibliografía que figura al final del libro.

Corresponden a esta categoría los problemas 1 y 2.

1. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 2. ¿Cuántos tienen entre las dos?
2. Mi amiga y su hermana tienen 7 ositos. Si 2 pertenecen a mi amiga, ¿cuántos tiene su hermana?

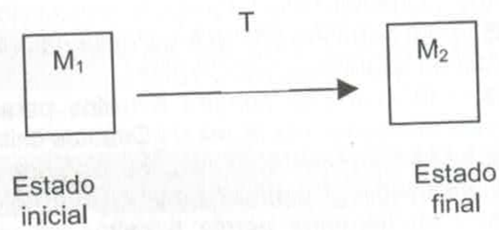
En el problema 1, las cantidades son 5 ositos y 2 ositos (de medidas 5 y 2) y se solicita obtener la composición de ambas medidas (M_3) a través de la operación adición: $\mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = M_3$, o sea $5 + 2 = 7$.
En el problema 2 las medidas también son 2 y 7. Esta última medida es la composición, la incógnita es una de las medidas (M_2) y la relación está dada por la expresión $\mathbf{M_1} + M_2 = \mathbf{M_3}$ cuya resolución conduce a la operación sustracción ya que

$$M_2 = \mathbf{M_3} - \mathbf{M_1} \text{ o sea } 5 = 7 - 2$$

Este tipo de problemas es abordado casi sin dificultades por los niños desde los primeros años de escolaridad aún cuando los problemas del tipo 1 son más sencillos que los del tipo 2 ligados a la búsqueda de complementos aditivos (cuánto le falta para llegar a...). Se identifican con los llamados problemas de reunir y separar.

Categoría 2

Problemas en que existe una transformación (T) que opera sobre una medida (M1) para dar otra medida (M2). La medida M1 corresponde a lo que llamamos estado inicial y la medida M2 es el estado final. Simbólicamente T(M1)=M2
La incógnita puede ser tanto una de las medidas como la transformación. Ésta puede ser positiva o negativa.



Los problemas 3 a 8 son de esta categoría.

3. Mi amiga tenía 5 ositos y le regalaron 2. ¿Cuántos tiene ahora?
4. Mi amiga tenía 5 ositos y perdió 2. ¿Cuántos tiene ahora?
5. Mi amiga tenía 5 ositos y después de la visita de la abuela tiene 7. ¿Qué sucedió en la visita?
6. Mi hermana tenía 5 ositos y después de mudarnos, tiene 2. ¿Qué sucedió en la mudanza?
7. Después de su cumpleaños mi hermana tiene 7 ositos. Si recibió 2 de regalo, ¿cuántos tenía antes?
8. Después de mudarnos mi hermana tiene 5 ositos. Si durante la mudanza se le perdieron 2, ¿cuántos tenía antes de mudarnos?

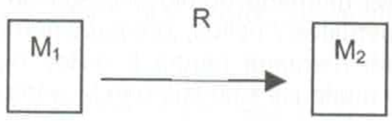
Sintetizaremos en un cuadro sus características.

Problema	M_1 Estado inicial	M_2 Estado final	Signo de T	T Transformación
3	5	incógnita	+	+2
4	5	incógnita	-	-2
5	5	7	+	incógnita
6	5	2	-	incógnita
7	incógnita	7	+	+2
8	incógnita	5	-	-2

Comparando con los problemas de la categoría anterior, los de esta categoría ofrecen más casos a considerar ya que en la expresión de las transformaciones intervienen los números enteros (números con signo). Las medidas siguen siendo expresadas por números naturales (números sin signo) por tratarse de magnitudes discretas. Se identifican con los llamados problemas de agregar y quitar.

Categoría 3

Problemas en que existe una relación (R) que relaciona una medida (M_1) con otra medida (M_2). La relación vincula dos medidas simultáneas. Simbólicamente $R(M_1)=M_2$
La incógnita puede ser tanto una de las medidas como la relación. Ésta puede ser positiva o negativa.



La diferencia con la categoría 2 radica en que no hay un estado inicial y un estado final sino que se dan simultáneamente ambas medidas. Corresponden a este caso los problemas 9 a 12.

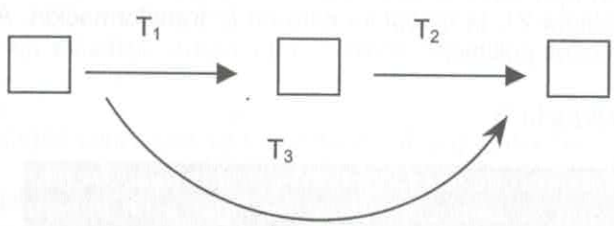
9. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 2 ositos más. ¿Cuántos ositos tiene la hermana?
10. Mi amiga tiene 5 ositos y su prima tiene 2 ositos menos. ¿Cuántos ositos tiene la prima?
11. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 7 ositos. ¿quién tiene más ositos y cuántos más?.
12. Mi amiga tiene 5 ositos y su hermana tiene 7 ositos. ¿quién tiene menos ositos y cuántos menos?.

Sintetizaremos en un cuadro sus características.

Problema	M_1	M_2	Signo de R	R Relación
9	5	incógnita	+	+2
10	5	incógnita	-	-2
11	5	7	+	incógnita
12	5	2	-	incógnita

Categoría 4

Problemas que involucran dos transformaciones (T_1, T_2) que se componen para dar lugar a una tercera (T_3). Simbólicamente $T_1 \circ T_2 = T_3$. La incógnita puede ser tanto T_1 como T_2 ó T_3.



Los problemas 13 a 19 corresponden a esta categoría. No se conocen estados inicial ni final, sólo las transformaciones.

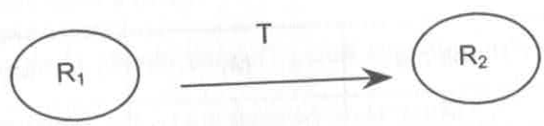
13. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron 2 ositos más. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
14. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió 2 ositos. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
15. Mi hermana perdió 3 ositos en la primera mudanza y 2 ositos en la segunda. ¿Cuántos perdió en total?
16. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron algunos ositos más. ¿Cuántos ositos le regalaron si agregó 7 a su colección?
17. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió algunos ositos. ¿Cuántos ositos perdió si sólo agregó 2 a su colección?
18. Mi hermana perdió 5 ositos en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza llevaba perdidos 7 ositos, ¿cuántos perdió en la segunda mudanza?
19. Mi hermana perdió 5 ositos de su colección en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza sólo faltaban 3 ositos de la colección, ¿qué sucedió en la segunda mudanza?

Estos problemas presentan mayores dificultades de resolución debido a la falta de estado inicial y su tratamiento se pospone para 3° o 4°. Cabe observar que en el problema 15 si bien el verbo es perder la operación que resuelve el problema es la adición contrariamente al indicio.
Volquemos en un cuadro las diferencias entre los distintos problemas de esta categoría.

Problema	T_1	T_2	Signo de la incógnita	T_3
13	+5	+2	+	incógnita
14	+5	-2	+	incógnita
15	-3	-2	-	incógnita
16	+5	incógnita	+	+7
17	+5	Incógnita	-	+2
18	-5	incógnita	-	-7
19	-5	incógnita	incógnita	-3

Categoría 5

Problemas en que existe una transformación que opera sobre un estado relativo (R_1) para dar otro estado relativo (R_2).



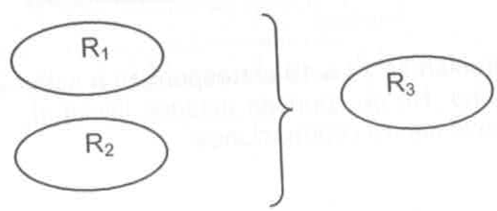
Los problemas 20 y 21 son de esta categoría.

20. Mi hermana tiene 5 ositos más que yo. Si le regalan 2 ositos. ¿Cuántos ositos más que yo tiene ahora?
21. Mi hermana tiene 5 ositos menos que yo. Si mamá le regala algunos ositos y ahora tiene 2 ositos menos que yo. ¿cuántos le regalaron?.

En el problema 20 la incógnita corresponde a uno de los estados relativos mientras que en el problema 21, la incógnita está en la transformación. Ambos problemas no responden a todos los casos posibles.

Categoría 6

Problemas que involucran dos estados relativos (R_1, R_2) que se componen para dar lugar a un tercero (R_3). La incógnita puede ser tanto R_1 como R_2 o R_3.



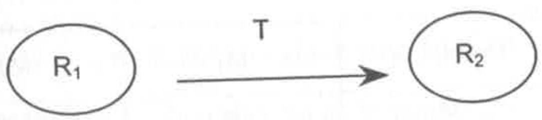
13. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron 2 ositos más. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
14. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió 2 ositos. ¿Cuántos ositos agregó a su colección?
15. Mi hermana perdió 3 ositos en la primera mudanza y 2 ositos en la segunda. ¿Cuántos perdió en total?
16. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y por la compra, le regalaron algunos ositos más. ¿Cuántos ositos le regalaron si agregó 7 a su colección?
17. Mi hermana compró 5 ositos para agregarlos a su colección y en el camino perdió algunos ositos. ¿Cuántos ositos perdió si sólo agregó 2 a su colección?
18. Mi hermana perdió 5 ositos en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza llevaba perdidos 7 ositos, ¿cuántos perdió en la segunda mudanza?
19. Mi hermana perdió 5 ositos de su colección en la primera mudanza. Si después de la segunda mudanza sólo faltaban 3 ositos de la colección, ¿qué sucedió en la segunda mudanza?

Estos problemas presentan mayores dificultades de resolución debido a la falta de estado inicial y su tratamiento se pospone para 3° o 4°. Cabe observar que en el problema 15 si bien el verbo es perder la operación que resuelve el problema es la adición contrariamente al indicio.
Volquemos en un cuadro las diferencias entre los distintos problemas de esta categoría.

Problema	T_1	T_2	Signo de la incógnita	T_3
13	+5	+2	+	incógnita
14	+5	-2	+	incógnita
15	-3	-2	-	incógnita
16	+5	incógnita	+	+7
17	+5	Incógnita	-	+2
18	-5	incógnita	-	-7
19	-5	incógnita	incógnita	-3

Categoría 5

Problemas en que existe una transformación que opera sobre un estado relativo (R_1) para dar otro estado relativo (R_2).



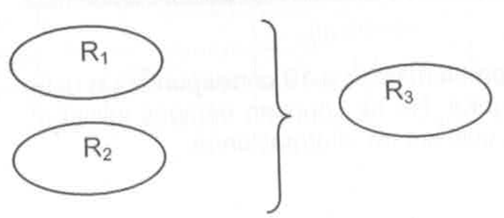
Los problemas 20 y 21 son de esta categoría.

20. Mi hermana tiene 5 ositos más que yo. Si le regalan 2 ositos. ¿Cuántos ositos más que yo tiene ahora?
21. Mi hermana tiene 5 ositos menos que yo. Si mamá le regala algunos ositos y ahora tiene 2 ositos menos que yo. ¿cuántos le regalaron?.

En el problema 20 la incógnita corresponde a uno de los estados relativos mientras que en el problema 21, la incógnita está en la transformación. Ambos problemas no responden a todos los casos posibles.

Categoría 6

Problemas que involucran dos estados relativos (R_1, R_2) que se componen para dar lugar a un tercero (R_3). La incógnita puede ser tanto R_1 como R_2 o R_3.



El problema 22 es de categoría 5.

22. Le presté 5 ositos a mi hermana y ella me prestó 2. ¿Cuántos ositos me debe?

La incógnita es el estado relativo que resulta de la composición de ambos estados relativos negativos. Este no es único caso posible para esta categoría, ¿cuáles faltan? .

Para afianzar

1. Proponga problemas de categoría 5 que respondan a cada uno de los siguientes casos:

Problema	R_1	R_2	Signo de la incógnita	T
?	+5	incógnita	-	-3
?	-3	incógnita	+	+3
?	-3	incógnita	-	-3
?	+5	+2		incógnita
?	-5	+2		incógnita
?	+5	+7		incógnita

2. Proponga problemas de categoría 6 que respondan a cada uno de los siguientes casos:

Problema	R_1	R_2	Signo de la incógnita	R_3
?	+5	+2		incógnita
?	-3	+2		incógnita
?	-3	incógnita		-5
?	+5	incógnita		+7
?	-5	incógnita		+3

¿Puede un niño abordar <u>todas</u> las clases de problemas del campo conceptual aditivo en el primer ciclo de escolaridad?. Evidentemente no es así y es por ello que insistimos en que dentro de las instituciones se debe planificar el tratamiento de estos problemas para proponerlos y discutirlos con los alumnos siguiendo un plan sistemático y continuo de abordaje de los mismos. Las distintas categorías de problemas presentan diferentes grados de dificultad. Los problemas de la primera y segunda categoría son más fácilmente abordables por los niños que los de la última categoría.

Otra forma de clasificar los problemas consiste en tener en cuenta el tipo de ecuación que involucran. Veamos esto en algunos de los problemas anteriores:
el problema 1 es del tipo a+b = ?
el problema 7 es del tipo c = a+?
el problema 17 es del tipo a–? = c
Los investigadores Carpenter y Moser (1983), en estudios realizados con niños de 1° a 3° de EGB, llegaron a las siguientes conclusiones:

- Los problemas del tipo a+b=?, a–b=? llamados canónicos son menos difíciles que los no canónicos a+?=c, a–?=c.
- Los problemas de sustracción son más difíciles que los de adición.
- Los problemas del tipo ?–b=c es el más difícil de los que incluyen sustracción.
- Los problemas con la operación en el lado derecho del signo igual son más difíciles que las correspondientes con la operación a la izquierda.

Resta aclarar que las dificultades no sólo dependen de la categoría sino también:

Con respecto a los enunciados

cómo están presentados (con materiales concretos, con dibujos, orales, etc),
la familiaridad de los contextos,
si son escritos, con la longitud del enunciado.

Con respecto a los números que intervienen

el tamaño de los números involucrados,
si los números son nudos,
si son números próximos.

La lista anterior no es exhaustiva. Sólo pretende mostrar algunas de las dificultades que debe enfrentar un niño en el momento de tener que resolver un problema. ¿Qué hacer ante esto?. Planificar la enseñanza teniendo presente que **son los problemas los que dan sentido a las operaciones y es insoslayable su tratamiento.** Además enfrentar al niño a la resolución de problemas convenientemente elegidos y con una adecuada intervención provocará un avance en sus concepciones.

¿Qué hacemos con el cálculo?

El cálculo está íntimamente ligado a la resolución de problemas y su desarrollo es simultáneo. Pero es necesario insistir en que hablar de cálculo remite no sólo al cálculo algorítmico sino también a las otras formas de cálculo existente: cálculo reflexionado (o mental o pensado), cálculo automático (o mecánico) en sus dos versiones: algorítmico o con soporte concreto (contadores, reglas de cálculo, calculadoras de bolsillo, computadoras).

> **Como ya mencionaban Carpenter y Moser (1979), tradicionalmente se ha enseñado a los niños con la intención de que dominasen las destrezas de carácter computacional antes de que empezaran a aplicarlas a situaciones y problemas prácticos. Se ha cargado mucho el acento, y sigue cargándose, en que los niños adquieran destreza y soltura en las rutinas del cálculo por escrito, independientemente de si comprenden o no los fundamentos de tales técnicas.**
> **Sin embargo, con el advenimiento de la calculadora de mano y un conjunto de investigaciones cada vez más completas de los métodos de ocasión de que se valen los niños para efectuar sus cálculos, existe el temor de que la insistencia en los procedimientos algorítmicos típicamente utilizados en los cálculos con lápiz y papel sean, por una parte innecesarios y en cierta medida perniciosos.**
>
> **Dickson, Brown y Gibson**
> **El aprendizaje de las matemáticas**

La lectura del párrafo anterior lleva a un replanteo de las prácticas usuales en la enseñanza de las operaciones. ¿Cómo comenzar?, ¿es adecuado partir de los algoritmos?. La justificación de los procedimientos algorítmicos se basa en las propiedades de las operaciones y del sistema de numeración indo arábigo[2]. Constance Kamii (1985) postula que la comprensión de la ley de posicionalidad no es un objetivo alcanzable en 1° año de EGB apoyada en investigaciones al respecto. ¿Qué hacer ante esto?. ¿Enseñar los algoritmos sin que los niños comprendan su funcionamiento y apelando a la mera repetición?.

¿Qué riesgos corremos? En general, podemos hacer creer a nuestros alumnos

- ✓ que los contenidos matemáticos no tienen fundamentación o
- ✓ que son tan difíciles de comprender que sólo los más aptos pueden aprender.

En particular, corremos el riesgo de una incorrecta aplicación de las reglas que produzca errores como los siguientes

---

[2] Ver capítulo anterior

$$\begin{array}{r} 47 \\ +\ 5 \\ \hline 97 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ +\ 28 \\ \hline 514 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ -\ 28 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 705 \\ -\ 209 \\ \hline 406 \end{array}$$

¿Qué error se manifiesta en cada una de las cuentas anteriores?

- ✓ No encolumnar correctamente,
- ✓ no respetar los “canjes”,
- ✓ restar sin considerar si las cifras pertenecen al minuendo o al sustraendo,
- ✓ saltar el cero.

Si el niño no puede controlar los resultados y solamente puede saber si son, o no, correctos a través de su maestro, no podrá ser autónomo. Para evitar esto se propone no iniciar el cálculo desde los algoritmos sino desde el cálculo mental. En el capítulo VII *Cálculo mental en la escuela primaria,* cuya lectura sugerimos, la licenciada Cecilia Parra propone las siguientes hipótesis didácticas que avalan la inclusión de estos contenidos en la enseñanza:

> **Los aprendizajes en el terreno del cálculo mental influyen en la capacidad para resolver problemas**
> **El cálculo mental acrecienta el conocimiento en el campo numérico**
> **El trabajo de cálculo mental habilita un modo de construcción del conocimiento que, a nuestro entender, favorece una mejor relación del alumno con la matemática**
> **El trabajo de cálculo pensado debe ser acompañado por un acrecentamiento progresivo del cálculo automático.**
>
> **Cecilia Parra e Irma Saiz (compiladoras)**
> **Didáctica de las Matemáticas – Aportes y reflexiones**

En el punto 3.2 mencionamos cómo los niños al resolver problemas aditivos pasan del conteo al cálculo. Inicialmente se valen de hechos memorizados para pasar a hechos deducidos y es recién en esta etapa en que podemos decir que el niño está sumando o restando, los números aparecen como recurso para anticipar. Por lo tanto, es necesario que la memorización de las primeras sumas se torna imprescindible. ¿Cuáles son las primeras sumas en ser memorizadas? A partir de investigaciones al respecto, C.Kamii propone[3] una secuencia para 1° año:

- adición de sumandos hasta 6
- adición de dobles hasta 10
- adiciones de la forma **a + 1**
- adiciones de la forma **a + 2**
- propiedad conmutativa de la adición
- adiciones de resultado 10

Sobre ellas se apoyan las restantes por reagrupamientos. Por ejemplo, 6+7 se puede calcular como

[3] Kamii, C.: El niño reinventa la aritmética. España. Visor libros. (1986)

- ✓ (6+6)+1 reagrupamiento en torno a un doble
- ✓ (6+4)+3 reagrupamiento en torno a 10
- ✓ (7+3)+3 reagrupamiento en torno a 10
- ✓ (5+5)+(1+2) reagrupamiento en torno a 5.

Estos reagrupamientos evidencian la red de relaciones entre números que se va estableciendo y nos permite advertir que el niño está pasando de calcular 6+7 como

- ✓ 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 (en el conteo)
- ✓ ó 6+1+1+1+1+1+1+1(en el sobreconteo)

La suma de los nudos (10+10, 10+40, 20+60, etcétera) es otro saber que, gracias a las regularidades de nuestro sistema de numeración, sirve de soporte al avance en cálculos de mayor complejidad.

Estas actividades de reagrupamientos no terminan en 1º grado sino que continúan en grados sucesivos a medida que avanza el rango de la numeración a estudiar. Los alumnos disponen de estas estrategias de cálculo que les permiten resolver "las cuentas" desde sus saberes previos y pudiendo dar cuenta de los pasos elegidos. La aparición de los algoritmos como caminos más económicos para algunas situaciones no violenta el proceso de construcción sino que se muestra como una forma más de resolución.

La adición y la sustracción como objeto de enseñanza

Nuevamente el problema como origen del conocimiento.

Al proponernos enseñar matemática hay dos preguntas iniciales que debemos plantearnos:

- ¿por qué es importante aprender matemática?
- ¿por qué enseñar a partir de problemas?

Día a día aumentan las aplicaciones de la matemática en cuestiones de ingeniería, de aeronáutica, de economía, de diseño industrial, de arquitectura, etc. Por ello se requieren más matemáticos dedicados a la investigación ya que sus desarrollos también resultan de aplicación en otras áreas. A su vez la matemática está presente en nuestra vida cotidiana y nos sirve para comprender lo que ocurre a nuestro alrededor.

Un niño de nuestros días se encuentra rodeado de estímulos que le provee la educación informal, con medios tecnológicos, muchas veces altamente informatizado por lo cual requiere una educación diferente de la impartida años atrás. La gran cantidad de conocimientos disponibles al día de hoy (matemática informativa), tornan más complejas las decisiones respecto de la selección de contenidos. Por ello habrá que tener en cuenta, además del **valor informativo** de la matemática, el **valor formativo**, aquél que nos permite estructurar nuestro pensamiento agilizando el razonamiento deductivo.

Como dice el Dr. Luis Santaló:

> **(...) Como regla general, se puede recomendar que siempre es preferible saber poco y bien que mucho y mal. Es más recomendable hacer cabezas bien hechas que cabezas bien llenas, aunque en la actualidad , con los modernos mecanismos computacionales y su memoria, se pueden lograr cabezas bien llenas que al mismo tiempo sean bien hechas.**
>
> **Saiz, I, Parra, C. (compiladoras)**
> **Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones**

Así es que la segunda pregunta que planteamos comienza a vislumbrar su respuesta. ¿Cómo hacer entonces "cabezas bien hechas"?. Trabajando a partir de la resolución de problemas. Citando nuevamente al Dr. Luis Santaló y del mismo texto

> **(...) la verdadera matemática ha consistido siempre en la resolución de problemas: nunca puede ser una sistemática de definiciones y descripción de propiedades.**

Pero..., ¿en qué consiste **trabajar a partir de problemas?**. Todos los docentes dicen hacerlo pero en el momento de la práctica no logran alcanzar el valor formativo de la matemática.

La resolución de problemas está indisolublemente ligada al quehacer matemático y todas las propuestas curriculares de Matemática lo plantean como un contenido para todos los niveles y ciclos. Sin embargo, aún cuando en los primeros años de la escolaridad no parece haber grandes dificultades en la resolución de problemas, llegados los alumnos al segundo ciclo de la EGB, los maestros anuncian con preocupación:

- Les cuesta leer e interpretar el enunciado de los problemas.
- No piensan, se "empacan" y esperan que yo les diga todo.
- Tratan de adivinar. Cuando les propongo un problema me preguntan : ¿es de más?, ¿es de menos?, ¿es de por o de dividido?.
- No analizan qué se les solicita (parece como si no tuvieran clara la pregunta) y en general, eligen las operaciones sin una verdadera justificación.

Ante esta situación cada docente busca soluciones que revelan sus propias concepciones de enseñanza. Algunas de éstas son:

- Considerar que primero deben trabajar el cálculo algorítmico para luego pasar a los problemas. Éstos son considerados como una oportunidad para aplicar los algoritmos. Por ello, previamente, proponen arduos y copiosos ejercicios de fijación de algoritmos (cuadernos repletos de cuentas).

- Dar problemas excesivamente sencillos que casi no presentan desafíos o bien con indicios o sugerencias visibles que permitan descubrir rápidamente la operación que los resuelve. Por ejemplo:

Poniendo como título de los problemas la operación
Vamos a sumar
Sumemos para resolver
Hoy restamos
Leer el título, operar correctamente con los datos que aparecen. La dificultad no se centra en la resolución sino en el cálculo ¿Estará relacionado con el problema de "La edad del capitán"[1]?

Poniendo en los problemas expresiones que revelen la operación
Mi mamá compró 3 manzanas y 5 naranjas. ¿Cuántas frutas compró ***en total****?*
La expresión **"en total"** es sobreabundante pero refuerza la idea de que la operación resolvente es la adición.

Utilizando verbos que evoquen las operaciones sin contemplar las excepciones
Facundo tenía 15 figuritas y ***ganó*** *2. ¿Cuántas tiene ahora?*
Si es **ganar** entonces hay que sumar .
Matías tenía 15 figuritas y ***perdió*** *2. ¿Cuántas tiene ahora?*
Si es **perder** entonces hay que restar.

¿Son válidas estas consideraciones?. A veces si y otras veces, no, basta con pensar en un problema como el que sigue para advertir la inconsistencia de lo expresado.
Alejandro perdió 4 figuritas en la escuela y al jugar con sus amigos a la tarde perdió otras 5 figuritas. ¿Cuántas perdió ese día?

Proponiendo relaciones entre operaciones y resultado sin advertir sobre el campo de validez
Facundo tenía 5 figuritas y ganó 2. ¿Cuántas tiene ahora?

[1] "En un barco hay 16 cabras y 10 vacas. ¿Cuál es la edad del capitán?". Enfrentados a este problema un alto porcentaje de alumnos responde 26 años

Si el resultado debe ser mayor que los datos es de suma o de multiplicación. A la inversa, si el resultado debe ser menor es de resta o división. ¿Es esto siempre así? Veamos este ejemplo:
Emilia compró ¼ kg de cebollas a $0,80 el kg. ¿Cuánto pagó?

Proponer los problemas y hacer pasar al pizarrón a los alumnos más hábiles que supieron resolverlos (casi siempre los mismos) mientras el resto copia la resolución en sus cuadernos.

Por supuesto que al momento de la evaluación los fracasos son masivos ya que estas formas de que "adviertan" la operación a utilizar no resuelven las dificultades que renacen cada nuevo ciclo escolar. ¿Cómo lograr que los niños enfrenten las dificultades que plantea un problema con disposición de búsqueda, aceptando el desafío, sin desanimarse al descubrir que eligieron caminos errados, con confianza en sí mismos, con paciencia hacia los demás y hacia si mismos...?.
No hay recetas mágicas. La tarea del docente es importante particularmente en cuanto a la gestión de la clase. Algunas sugerencias son:

- ✓ Primeramente elegir el problema teniendo en cuenta los saberes previos de los alumnos, asegurándose de que cuenten con algún procedimiento de resolución por más primitivo que éste resulte.
- ✓ Devolver la responsabilidad de la búsqueda de la solución a los alumnos cambiando las condiciones del contrato didáctico. "Para actuar, el ser humano debe verse como protagonista de su destino y no como víctima de sus circunstancias" . (Kofman, F. 2000)
- ✓ Estar atentos a los errores no considerándolos como anomalías sino como manifestaciones de procesos de construcción necesarios para la normal evolución de los conceptos.

Sabemos que trabajar de esta manera es deseable y posible. A nivel institucional, es necesario organizar con continuidad el tratamiento de los diferentes tipos de problemas.

La resolución de problemas y el diseño curricular

A continuación encontrará algunos contenidos que se suelen ver en distintos diseños curriculares y en planificaciones docentes, acompañados de un texto en relación a dichos contenidos. Lo invitamos a reflexionar sobre ellos, estableciendo relaciones que le permitan encontrar algunas respuestas sobre los modos más convenientes de llevar adelante un planteo metodológico, para que sus alumnos puedan **formarse** informándose.

¿Cómo abordaremos la resolución de problemas?. Dado el problema, los alumnos se disponen a resolverlo de manera autónoma, elaborando ideas, formulando proyectos, seleccionando información, organizando los datos. Poniendo en juego su fantasía, su intuición y el razonamiento buscan buenas ideas para resolver el problema ¿No es esto lo que hace un matemático?. Para que esto suceda el maestro no deberá hacer intervenciones que "orienten", diciéndoles qué quiere obtener y cómo.

Contenidos a relacionar:

- Curiosidad, apertura y duda como base del conocimiento científico.
- Interés por el uso del razonamiento intuitivo, lógico y la imaginación para plantear y resolver problemas.
- Gusto por generar estrategias personales en la resolución de problemas.
- Discutir estrategias, formular conjeturas, examinar consecuencias y alternativas en trabajos de equipo.
- Respeto por las fuentes y honestidad en la presentación de resultados.

- Establecimiento de relaciones en el procedimiento y la razonabilidad del resultado, en el contexto de la situación planteada.
- Escucha e interpretación de consignas, enunciados de problemas e información matemática sencilla.

Las respuestas obtenidas así como los procedimientos empleados tienen un carácter personal (el del alumno o grupo de alumnos que lo han resuelto). Entonces aceptaremos la aparición de procedimientos diferentes para un mismo problema con respuestas correctas, como así también respuestas incorrectas. Esto lleva a pensar en una puesta en común donde se comunicarán estrategias y resultados, tratando de convencer a los interlocutores de la validez de las afirmaciones que hacen, elaborando pruebas para demostrarlas. Cabe esperar en esta instancia la posibilidad de que surja un replanteo del problema y que, en algunas ocasiones, los alumnos necesiten resolverlo nuevamente.

Contenidos a relacionar

- Disciplina, esfuerzo y perseverancia en la búsqueda de resultados.
- Valoración del intercambio de ideas como fuente de aprendizaje.
- Respeto por el pensamiento ajeno.
- Seguridad en la defensa de sus argumentos y flexibilidad para modificarlos.
- Tolerancia y serenidad frente a los errores y logros en la resolución de problemas.
- Seguridad en la defensa de sus argumentos y flexibilidad para modificarlos.
- Valoración del lenguaje claro y preciso como expresión y organización del pensamiento.

Todo conocimiento se considera como una respuesta del hombre ante una situación o problema que ha tenido que enfrentar. Hay una instancia de este proceso de resolución de problemas donde los conocimientos son consensuados, acordados, institucionalizados, estableciendo convenciones sociales.

Contenidos a relacionar

- Disposición para acordar, aceptar y respetar reglas en la resolución de problemas.
- Determinación de los procedimientos más económicos para la obtención de un resultado correcto.

La resolución de problemas y las relaciones humanas

Todo el proceso de resolución de problemas está ligado a las relaciones entre alumnos y docentes, además del saber. Los comportamientos y actitudes de unos y otros impregnan este proceso, y el mismo constituye una excelente oportunidad de crear relaciones y vínculos, aceptando la creatividad individual y de equipo, las discrepancias y los acuerdos, en una palabra crecer como persona, que no es otra cosa que educar y educarse.

Cómo evaluar éxitos y fracasos en este proceso

Podríamos decir que una alumno que no llegó al resultado correcto o que no pudo completar la resolución de un problema "fracasó" en ese objetivo, pero también podemos decir que consiguió con "éxito" utilizar al máximo sus conocimientos y recursos para encarar el desafío propuesto. Como docentes debemos encargarnos de explicitar estas cuestiones, ya que sentirse bien y satisfecho permite aceptar el fracaso sin miedos ni vergüenzas y posibilitará retomar el desafío aceptando el reto nuevamente y emprendiendo una nueva búsqueda en este proceso de aprender.

Las prácticas docentes. Reflexión y análisis

Los modos de acercamiento al conocimiento son fundamentales para la comprensión de los conceptos, permitiendo hacer de éstos, aprendizajes significativos o no. Cuando hablamos de aprendizajes significativos nos referimos a aquellos que los alumnos construyen, ya que de ese modo estarán disponibles cuando necesiten enfrentarse a una situación nueva.
Según Gómez, P y Mesa, V , "el NCTM (1991 - Professional standards for teaching mathematics) sugiere cuatro aspectos que son considerados como centrales en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Estos cuatro aspectos del razonamiento pedagógico del profesor son los siguientes:

- La selección de tareas matemáticas valiosas.
- El manejo del discurso en el salón de clase.
- La creación de un entorno apropiado para el aprendizaje.
- El análisis de la enseñanza y el aprendizaje."

A continuación encontrará dos registros de clase donde se intenta mostrar dos formas de poner en contacto a los niños con los problemas de adición y sustracción en primer grado y la incorporación de las escrituras en símbolos de dichas operaciones.
Según el Dr. Vergnaud, el significado que más tempranamente asocian los chicos con la suma y la resta, son los problemas donde hay una transformación inicial de la cantidad de elementos de la colección. Por ejemplo problemas como tener una colección de palitos y agregar o sacar palitos, tener lápices en una caja y agregar o sacar lápices de la misma, entre otros. Ahora bien, la representación escrita de la situación mediante un cálculo es algo que los chicos construyen paulatinamente.
Alrededor de esta temática el lector tendrá la oportunidad de recrear los cuatro aspectos citados por el NCTM. Para el último, el análisis de la enseñanza y el aprendizaje, cuenta con el marco teórico desarrollado en el libro y además las siguientes preguntas que lo guiarán en el análisis de los registros de clase.

- ¿Hay un problema o desafío que el alumno debe resolver? En caso afirmativo ¿cuál es?
- Las intervenciones docentes, ¿aportan el procedimiento a seguir para resolver el problema?; ¿qué tiempo dan para contestar a los interrogantes planteados?; ¿dan oportunidad para discutir y reflexionar sobre los inconvenientes que se suscitan en la clase?; ¿promueven la autonomía en la resolución de problemas?; ¿permiten el error como fuente de aprendizaje?; ¿dejan ver al alumno como capaz de pensar y producir conocimiento?
- Los alumnos, ¿resuelven el problema o adivinan el resultado?. ¿Despliegan procedimientos variados?, ¿cuáles?. ¿Tienen oportunidad de defender un procedimiento o una respuesta aún cuando sea errónea?. ¿Qué control tienen sobre su acción?. ¿Tienen la posibilidad de construir aprendizajes significativos?

Primera clase
Este registro corresponde a una clase de adición y sustracción en primer grado, en el mes de mayo.

A1: Seño, ¿ponemos la fecha?
D: No, prestamos atención y sacamos los palitos. ¡Vamos ya tienen que estar los palitos en el banco!. ¡Vamos, rápido!.
D: Recuerden que llegamos al 19. (Señala el cartel en el pizarrón).
D: Entonces sacamos 19 palitos.
A2: No los traje.

A3: No los encuentro.
A4: No me alcanzan.
D: Todo el mundo tiene que tener los palitos con su nombre. Para mañana no quiero que nadie diga que no los tiene. Ahora el que no los tiene trabaja con el compañero a su lado y presta atención.
A4: ¡Ya está!
D: Vamos contando (escribe en el pizarrón palitos y a medida que escribe, los alumnos cuentan en voz alta). (Luego muestra que tiene un montoncito que son 19). (Luego hace lo mismo con los carteles de arriba que tiene los números del 1 al 19). De estos 19 voy a elegir solo 6 (que son los palitos que tiene en sus manos y los muestra).

La docente dibuja en el pizarrón lo siguiente

| | | | | | = 6

D: Tengo 6 palitos en la mano y saco 2. ¿Cuántos me quedan en una mano y cuántos me quedan en la otra?
A2: 5
A5: 2
A6: 10
D: En una me quedan 2 y en la otra 4 ¿verdad? (Mostrando los palitos de una mano y los de la otra cuando nombraba los números correspondientes).
A: ¡Siii...!. (Varios alumnos responden simultáneamente).
D: Esto quiere decir que (escribe en el pizarrón) cuatro más dos es igual a seis.

$4 + 2 = 6$

D: ¿Cómo se llama esto? (señalando el signo más)
A: Más. (Varios alumnos responden simultáneamente).
D: ¿Y esto? (señalando el signo igual)
A: Igual
D: Vamos con otro. Tengo seis y saco uno (muestra con los palitos que tiene en la mano) ¿cuántos me quedan?
A: (Nadie responde).
D: me queda uno en una mano y cinco en la otra ¿verdad?
A: (Varios) ¡Siii!.
D: ¿Qué quiere decir?... que uno más cinco es igual a seis. (Mientras lo dice lo escribe en el pizarrón)

1 + 5 = 6

| |||||

D: ¿Y si tengo seis y saco tres?, o mejor dicho...¿cuánto es tres más tres? (escribe en el pizarrón)

3 + 3 =

||| |||

A7: 10
A5: 8
A8: 3
D: ¡Piensen! Vamos, rápido ¡ustedes saben!.... es 6. (y coloca el número al lado del signo igual).
D: ¿Y si al seis lo separo en tres grupitos?
D: A ver A3:-¿cómo podés hacer?- (A3 parece no entender nada) ¡Prestá atención, estás perdido! A ver vos A7.
A7: Cuatro más uno más tres.

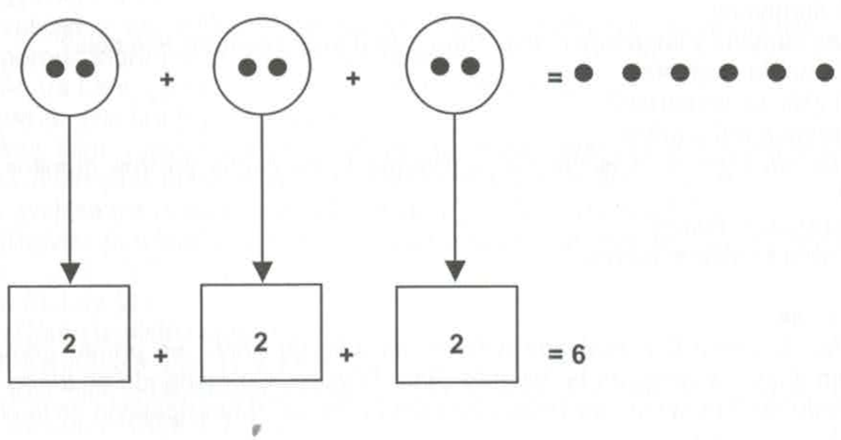
D: ¿Cuánto te parece que da esto?
A7: 6
D: A ver contá. (A7 la mira desconcertada). Vamos. Sacá tus palitos, contá cuatro palitos.
A7: Uno, dos, tres, cuatro.
D: Ahora contá uno. (La alumna saca un palito más). Juntálo con los cuatro anteriores y contá los tres que faltan.
A7: (Cuenta tres más).
D: Juntá todo y contalo. ¿Cuántos tenés?
A7: 1; 2; 3.............¡8!
D: ¿Qué pasó?
A7: Me paso.
D: Entonces no puede ser ¿verdad?. Vamos piensen en otro ejemplo. A ver miren acá (y escribe en el pizarrón).

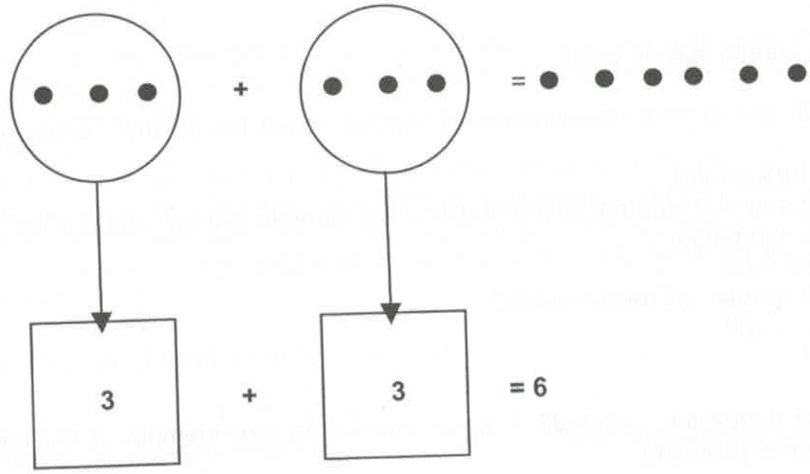
4 + 1 + ? = 6

D: ¿Qué número falta aquí?,(señalando el signo de pregunta). A9 ¿qué número falta para llegar a 6 si tengo 5? (La alumna no responde) ¿A4?
A4: el uno.
D: Muy bien A4, el uno. Ahora sí sacamos el cuaderno.
¿Qué día es hoy?

A continuación se escribe la fecha, cómo está el día, el nombre en el cuaderno. Y como título de la actividad copian ¿Cuántos hay?

D: ¿Qué estoy escribiendo? (Señala el signo de pregunta).
A8: Una pregunta.
D: ¿Cómo saben qué es una pregunta?
A8: Porque tiene el signo de pregunta.
D: Muy bien, porque tiene el ganchito. (Sigue copiando en el pizarrón).





A: ¡Seño, no entiendo! (varios simultáneamente).
D: Bueno, lo voy a explicar una sola vez así que presten mucha atención. ¿Cuántas pelotitas tengo aquí? (señalando el primer dibujo)
A: (varios) Dos.
D: Las pongo aquí (señala el cuadrado de abajo). ¿Cuántas pelotitas tengo aquí? (señalando el segundo círculo del primer ejercicio).
A: (varios) Dos.
D: ¿Dónde las tengo que poner?
A9: Ahí abajo seño (refiriéndose al cuadrado correspondiente).
D: Y ¿cuántos aquí? (señala el tercer círculo de la primera figura).
A: (varios) Dos.
D: y... cuento.
A: (varios) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
D: Ëse es el resultado, vamos, lo hemos hecho millones de veces. ¿Qué les pasa que no entienden nada?
D: A ver, quiero que dejen de copiar y me expliquen qué hicimos. Vamos! Que si no, no sale nadie al recreo.
A: (Hacen silencio todos y la miran).
(Toca el timbre)
D: Nadie se mueve. ¿Qué hicimos?
A: (varios) Sumamos.
D: Armamos sumitas y llegamos a seis. Pero ¿de dónde sacamos ese seis?
A: (silencio, nadie contesta).
D: ¡Del 19! ¿No se acuerdan?
A: Síííí!!!!(responden a gritos)
D: ¿Y cómo sacamos el seis del 19...?. Porque lo dividimos en tres grupitos, ¿se acuerdan?
A: Sí. (Responden a coro)
D: Bueno, ahora salen al recreo.

Segunda clase
Este registro de clase fue realizado a fines del mes de abril, en primer grado del Colegio San José , a cargo de la docente Clara Iglesias. Corresponde al *Juego de la caja* publicado en "Los niños, los maestros y los números" (Municipalidad de la ciudad de Bs. As.)
El objetivo es reflexionar sobre el sentido de las escrituras a + b y a - b.

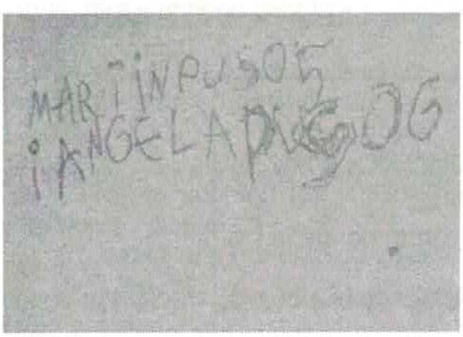
Docente: A ver quién se acuerda, ¿cómo se jugaba al juego de la caja? Levanten la mano para hablar.

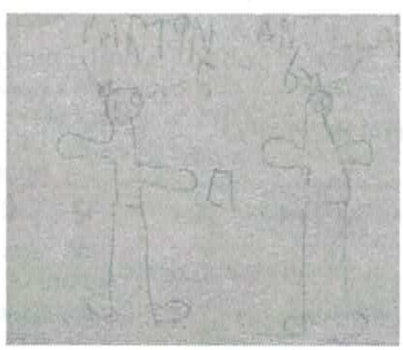
Valentina A : Había que..., uno tenía que salir afuera y uno ponía lápices y el otro sacaba y teníamos que escribir un mensajito y con los mensajitos había que saber cuántos había en la caja.
Valentina D: a veces sólo se ponían...
Docente: claro, a veces ponían y otras veces sacaban.
Juan Cruz: uno salía afuera, uno ponía y el otro sacaba y había que saber cuántos lápices había en la caja sin abrirla.
Docente: bueno, muy bien , ahora va a salir Juan Cruz..
Chicos: Ohhh!!!.
Docente: Ahora va a salir Juan Cruz y otra vez van a poder salir otros. Acuérdense que a Juan Cruz no le tenemos que decir cuántos lápices hay en la caja, él tiene que pensar cuántos hay con los mensajitos que nosotros le damos.
Van a pasar Angela y Martín, atención para escucha y poder escribir los mensajes, silencio.
Martín pone 5 lápices en la caja contando uno por uno en voz alta. Ángela pone 6 lápices contando uno por uno en voz alta
Docente: ¿Cuántos lápices puso Martín?
Chicos: 5!!!
Docente: ¿Y Ángela?
Chicos: 6!!
Docente: Bueno, cada uno empieza a escribir, Juan Cruz tiene que pensar cuántos lápices hay en la caja con sus mensajitos.
Vale A: ¿con números o con dibujos?
Docente: Con lo que quieras, con lo que te sirva
Reparte los papeles para que escriban los mensajes. Algunos se paran a buscar en la lista de nombres de los secretarios Ángela y Martín para usarlo en el mensaje.
Docente: ¿Ya estamos?
Chicos: ¡No, no!
Azul: A mí no me diste hoja
Docente: perdón amiga, vamos, vamos... Chicos vamos a esperar que los amigos terminen, Martín sentate en tu lugar. Cami, ¿terminaste el mensaje?
Muchos han terminado ya.
Docente: Bueno, vamos a hacer pasar a Juan Cruz. (*entra a la sala*)
Van a pasar acá al frente Ezequiel, Lara traé tu mensaje así lo copiás acá en el pizarrón. Carmina vení acá (*le señala el espacio*), y Valentina (*cada uno de los chicos copia su mensaje en el pizarrón*)
Docente: Vamos a ver Juan Cruz si podés saber con estos mensajes cuántos lápices hay en la caja sin abrirla.
Carmina explicale a los chicos qué pensaste y porqué escribiste ese mensajito
Carmina: porque Martín puso 5 y Ángela puso 6
Docente: Ahora Lara, ¿porqué pusiste Angela 6 , Martín 5?
Lara: porque Ángela tiró 6 y Martín 5
Docente: Muy bien, y ahora Ezequiel, chicos escuchen cómo pensó el compañero..
Ezequiel: Acá dibujé al Martín puso 5 y acá dibujé a la Ángela que puso 6
Valentina: yo hice 5 + 6, porque el Martín puso y la Ángela puso 6 más.
Docente: ¡Bravísimo a todos!, ¿Juan Cruz podés saber cuántos lápices hay con éstos mensajes?
Juan Cruz: Si, hay 11.
Docente: ¿Cómo te diste cuenta?.
Juan Cruz: porque 5 + 5 es 10 y 1 son 11.
Docente: Muy bien Juan ahora vamos a abrir la caja y vamos a contarlos. (*Juan cuenta los lápices y había 11*).
Martín: Hubiese sido más fácil 12 – 1.
Docente:... Pero, ¿pusimos 12 y sacamos 1?
Martín: No, porque hubiese sido más fácil porque te da 11
Docente: Una preguntita para todos, con el mensaje del Eze puedo saber si los chicos sacaron o pusieron lápices?

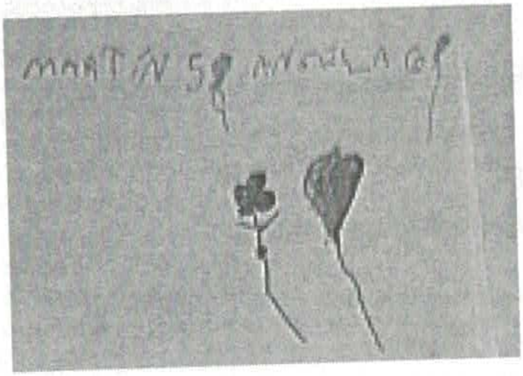
Candela: No!!!
Docente: por qué?
Candela: El Eze tendría que poner más arriba del dibujo para saber si pusieron o sacaron
Docente: Bien, y a ver con este mensaje, pasá Andrés a escribirlo al pizarrón. (*Escribe 5 – 6*). Podés leerlo?
Andrés: cinco menos 6
Docente: ¿Puede ayudar este mensaje a Juan Cruz para saber qué pasó?
Chicos: Nooo!!
Docente: ¿Por qué?
Eugenia: Porque ahí sacó, no puso.
Docente: A ver, a ver y ¿cómo es eso?
Vale A.: Porque el Martín y la Ángela pusieron, no sacaron, le faltaría un palito así.. (se para al frente y le agrega el palito para que quede +)
Docente: Están de acuerdo son eso?
Chicos: Si
Docente: Bueno, ahora va a salir Francisco afuera, atención va a pasar Serena y Micaela
Chicos: Después paso yo...(le piden muchos chicos)
Docente: Chicos ya hablamos el otro día que teníamos que disfrutar el juego todos aunque no todos puedan pasar, algunas veces les toca a algunos y otras veces a otros, además todos estamos jugando, ustedes están escribiendo los mensajes y eso es parte del juego...
Serena cuenta 7 lápices, Mica pone 2
Docente: ¿Cuántos puso Serena?
Chicos: 7
Docente: ¿Y Mica?
Chicos: 2
Docente: Atención amigos, en esta vuelta hay una condición, no se puede ni dibujar ni escribir con palabras.
Vale A: ¿Sólo con números?
Docente: Vos fijate qué se te ocurre y después lo hablamos
Juan Cruz: Son 9
Docente: Pero no le tenemos que decir cuántos lápices hay, sólo escriban el mensaje para que él lo piense
Nico: Seño, ¿cuántos puso la Sere?
Docente: 7 puso Serena y 2 Micaela
(reparte nuevos papelitos) Bueno, vamos a pensar los mensajes eh?
Docente: Fran vamos a ver si con los mensajes que los chicos escribieron vos podés saber cuántas fibras hay en la caja..
Chicos: Lápices, no fibras ..
Docente: lápices sí, la seño se confunde.. Va a pasar Sofía y Vale Díaz. (*Sofía escribió 7 –2 y Vale escribió 7 + 2, luego Sofía cambia el – por el + porque su compañera le dijo*).
Docente: ¿Sofi, por qué cambiaste tu mensaje, vos ponélo como vos lo habías pensado.
(*Sofía corrige y pone de nuevo el signo* -) Ahora explicá lo que escribiste
Sofía: Porque 7 y 2 son menos
Vale D: Porque la Serena puso 7 y Mica 2
Docente: Fran, ¿vos podés saber cuántos lápices hay en la caja?
Fran: 9
Docente: ¿Y cómo sabés?
Fran: porque 7 + 2 son 9
Docente: ¿Y este 7 –2?. A ver, ella escribió 7 – 2 y acá escribieron 7 + 2. ¿Por qué sumaste, por qué decís que es +?
Cande: Porque la Valentina puso 7 y la Mica puso 2

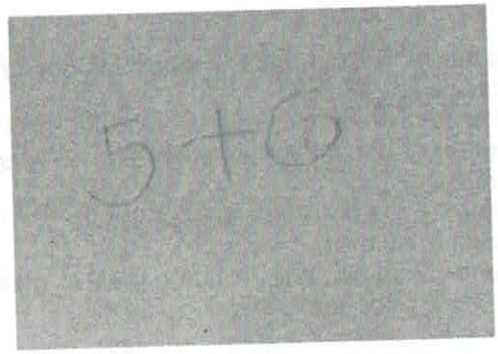
Docente: A ver, Andrés, ¿cuál de los dos le sirve a Francisco para pensar cuántos lápices hay en la caja?
Andrés: El primero
Docente: ¿Cuántos lápices puso Sere en la caja?
Andrés: 7
Docente: ¿Y la Mica puso o sacó 2?
Andrés: Puso más..
Docente: ¿Camila qué le agregarías al mensaje que escribió Sofi? (*Cami pasa y pone el* +). ¿Por qué?
Camila: Porque es 7 + 2
Docente: Fran, ¿cuánto era 7 + 2?
Fran: 9
Docente: ¿ Y cómo lo hiciste?
Fran: Con los dedos
Docente: Bueno vamos a contar lo que hay en la caja Fran. ¡9 fibras hay en la caja!
Chicos: Lápices!!
Docente: Bueno...(*se ríe la seño*). Nico, ¿podés pasar a buscar los mensajitos por los bancos?. (*La seño levanta la mano para pedir silencio).* Escuchen esto y ya salimos
Docente: Un amigo había escrito este mensaje: 7 2. ¿Qué piensan de este mensaje?
Juan Cruz: que le falta el +.
Lucía: El más...
Docente: ¿Por qué Juan Cruz te parece que le falta el +?
Juan Cruz: Porque si no, sería un 72.
Docente: ¿Y se puede dar cuenta el que está afuera cuántos lápices había en la caja?
Chicos: No!!
Vale A: le falta el +, si no tiene ni el más ni el menos no podés saber si hay más o hay menos
Docente: Claro, muy bien, ¿se puede saber si los compañeros sacaron o pusieron lápices?
Chicos: No
Docente: Lara, ¿qué le agregarías a este mensaje?.(*pasa Lara y agrega el + al medio*)
Docente: ¡Muy bien!, Nico, ¿qué le agregarías al mensaje si un chico hubiese puesto 7 lápices y otro hubiese sacado 2...(*pasa Nico y agrega el signo -*). *Toca el timbre.* Muy bien chicos, guardamos los lápices y gomas y salimos al recreo.

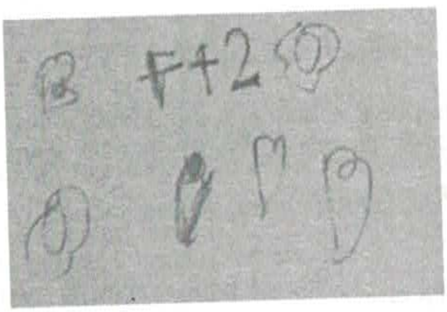
Aquí mostramos algunas producciones de los niños:

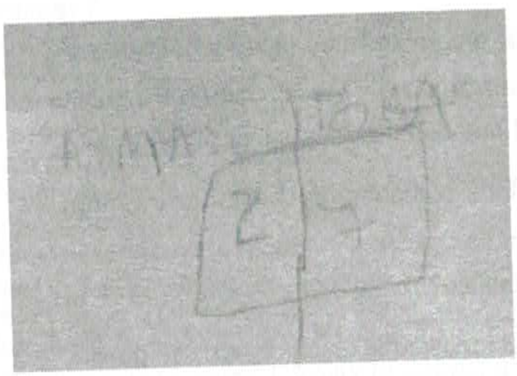


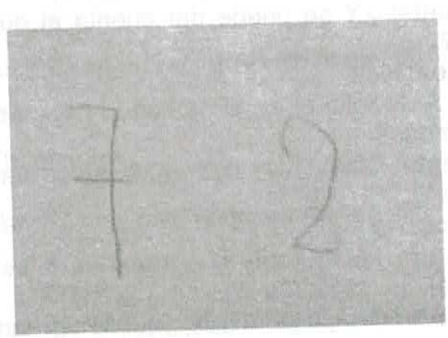












¿Ya sacó el lector sus conclusiones? Recuerde volver sobre las preguntas anteriormente formuladas para el análisis.

Sugerencias para el aula

- **Saco y pongo (Nivel Inicial)**

Material necesario

- Un dado en cuyas caras aparecen los siguientes dibujos:

  👎1, 👍1, 👎2, 👍2,

  las dos restantes caras no tienen dibujos.
- Objetos para contar como cubos o bolitas

Organización de la actividad

El docente explicará el significado de las caras del dado:

Manito arriba 👍 me llevo de la caja lo que indica el número.

Manito abajo 👎 pongo en la caja lo que indica el número.
Si salen las caras lisas le toca el turno al otro jugador.

Se juega en parejas. Cada niño recibe 5 cubos. En el centro de la mesa se coloca una caja con unos 15 ó 20 cubos. Tiran por turno y deben poner o sacar cubos de la caja según indica el dado. Gana en cada vuelta el que más cubos tiene.

Conocimientos previos

- Recitado de la serie numérica hasta 10 ó 12.
- Reconocimiento de algunos números escritos (por lo menos 1 y 2).
- Conteo o sobreconteo (algunos niños).

Variables didácticas

✓ Los números que figuran en los dados son el 1 el 2 pues son los que seguro todos los niños reconocen por escrito y porque la transformación que sufre la colección es mínima. Esto posibilita a algunos niños la anticipación del resultado sin recurrir al conteo.
✓ La cara lisa permite analizar los casos en que el número de la colección permanece invariable.
✓ La consigna de poner en la caja y llevarse de la caja permite descubrir la diferencia entre los problemas de adición y sustracción.

Investigación

Grupo 1

Juan tira el dado y obtiene 👎 **2** . Cuenta dos cubos de los que tiene consigo y los pone en la caja.

Agus obtiene 👍 **1**. Toma un cubo de la caja y lo pone en su montón.
-*Yo tengo más*- dice Agus. Juan acepta esta afirmación y continúan jugando.
Juan obtiene una cara lisa. Le toca a Agus.

Agus obtiene 👎 **2**. Cuenta dos cubos de su montón y los pone en la caja.
Juan : -*Me parece que yo tengo más.*
Agus: -*No, yo* (y empieza a contar).
-*Son 4.*
Juan: (que también contaba los suyos) -*Tengo 4.*

Juan: (tira y obtiene 👍 **1**.) -*Dice 4 y 5.*
Agus: (tira y obtiene cara lisa.) -¡*Te gané!* (exclama).

La maestra que está observando pregunta a Agus. -*¿Cómo sabés que le ganaste?*
Agus. -*Él puso 1* (refiriéndose a los que puso Juan en la caja) *y yo me llevé 1.*

Grupo 2

Eli y Victoria cuentan los cubitos cuando la docente les entrega los cinco cubos iniciales a cada una.
Eli: -*Yo empiezo.* (Tira el dado y saca lisa. Protesta porque piensa que ya perdió.)

Victoria: (👎 **2**). -¡*Dos! Ahora tengo muchos.* (Victoria extrae 2 de la caja pero Eli los toma y los vuelve a meter en la caja).
Victoria: ¡*No!* (Parece que van a discutir).
D: -*Deben hablar para ponerse de acuerdo. Sin pelear.* (Se aleja)

Victoria: -*Tengo que sacar 2 de la caja y son para mí.*
Eli: (mostrando el símbolo del dado). -*Tenés que poner 2.*
Victoria toma el dado y corre a preguntar a la docente. Ésta vuelve al grupo. Se aclara la diferencia de interpretación y ahora puede seguir el juego.
Victoria: -*Ahora pierdo* (fastidiada).
Eli: (Saca lisa nuevamente) ¡*Oh!*
Victoria: (**2**). -*Ahora estoy como antes. Son 5.* (no cuenta y lo dice rápidamente)
Eli: -*A ver, contá.* (Victoria cuenta y le muestra los 5).
Victoria: -*¡Empatamos!. Juguemos otra vez.*

Como se observa hay procedimientos de conteo, sobreconteo. En algunos grupos hay niños que ya calculan (muy pocos) y dicen por ejemplo *"Dos más dos son cuatro"*, o *"Uno más uno, dos"*

Puesta en común e institucionalización

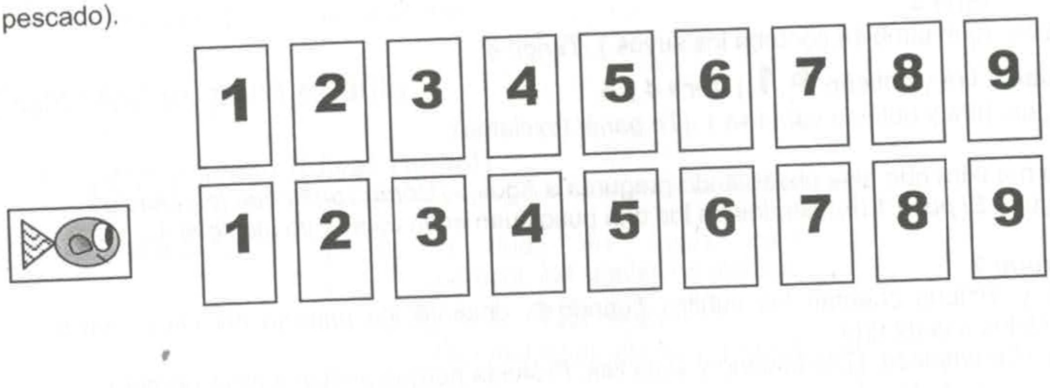
La docente hacen preguntas como:
¿Si los nenes que juegan tienen 4 cubitos cada uno, un nene pone 1 en la caja y el otro se lleva 1 de la caja, quién gana? ¿por qué?
¿Si los nenes tienen 3 cubitos cada uno, un nene pone 2 en la caja y el otro pone 1, quién gana?
¿Qué sucede cuando una nena primero saca 2 de su montón y después le agrega 2?
Mariano tiene 2 cubitos y Andrés tiene 4. Mariano pone 2 en su montón. ¿Le ganó a Andrés?
Para responder a estas preguntas algunos niños hacen anticipaciones, la mayoría representa con su material la situación para luego reponder.
Los niños acuerdan:
Cuando sacás del montón y lo ponés en la caja te quedan menos.
Cuando ponés en el montón podés ganar porque tenés más.

El contenido que se trabaja es:
Transformaciones que afectan la cardinalidad de un conjunto. (Problemas de agregar y sacar).

El pescado (primero o segundo grado)

Material necesario

Un mazo con las siguientes cartas (son 18 cartas con números y una es el pescado).



Consigna

Se reparten todas las cartas entre 3 jugadores, uno recibe una carta más.

El juego consiste en descartar sobre la mesa todas las parejas de cartas cuya suma da 10, de tal modo que queden a la vista. Luego, cada jugador se va "de pesca". Para ello, por turno, robará una carta al jugador que tiene a su izquierda. Si esta carta y alguna de las que él posee suman 10 las descarta y da a "pescar" a su compañero de la derecha.
Si algún jugador descarta mal, o sea arma pares que no dan 10, los otros deben pedirle que los vuelva a levantar.
El juego termina cuando todos los jugadores se han descartado y uno de los jugadores se queda con el pescado. Éste será el que perdió el juego.

Conocimientos previos

- Interpretación de problemas de adición con sumandos de una cifra.
- Resolución de problemas de adición con procedimientos de conteo y sobreconteo.
- Uso de los símbolos + e =.
- Memorización de algunas adiciones de dobles (2 + 2 = 4; 5 + 5 = 10 entre otras.)

Nota: Si los niños han conceptualizado ya las adiciones de dos sumandos que dan 10, este juego contribuirá a la memorización de las mismas.

Variables didácticas

✓Las números que figuran en las cartas y la regla de juego harán posible que los niños conceptualicen las adiciones de dos sumandos que dan 10.
✓Las cartas no tiene dibujos para que los niños usen libremente algunos cálculos memorizados que ya tengan incorporados a su repertorio. Si no pueden usar el procedimiento que puedan (dedos, dibujos u otro material para contar).
✓El hecho de descartar los pares boca arriba, permite a todos los niños controlar las operaciones. Por cada vuelta que se juega los niños están resolviendo 9 adiciones, habiendo 8 que se repiten dos veces. Esto contribuye a que comiencen a memorizar algunas.

Investigación

Los niños usan procedimientos como:

Conteo: Marcos para la adición 3 + 7 hace puntitos con el lápiz en una hoja. Primero marca 3 y luego 7. finalmente los cuenta desde el 1 hasta el 10.
Para la adición 6 + 4 Anita cuenta 6 dedos y luego cuenta 4. Se da cuenta que son los dedos de las dos manos y dice son 10. Hace conteo para los sumandos y visualiza 10 por tratarse de los dedos de las dos manos.

Sobreconteo: es el caso de Juan para la adición 4 + 6. Dice 4 y a continuación recita la serie oral desde el 5 hasta el 10 mientras usa sus dedos haciendo la correspondencia uno a uno.

Cálculo memorizado: Francisco dice 5 + 5 = 10
Hay niños como Ayelén que se equivocan y cuentan mal, obteniendo por conteo 8 en lugar de 10 ya que salteó algunas rayitas que había hecho por sugerencia de la docente.. Los otros niños la corrigen y le muestran con sus dedos cómo contar bien.
Marcia en la segunda ronda trata de convencer a sus compañeros de juego que ya no cuenten porque " siempre son las mismas sumas". Dice 4 + 6 = 10 y otras que ya fue memorizando.

Puesta en común

La docente al terminar el juego les pide a los niños que sobre el banco acomoden todas las parejas que les dieron como resultado 10. Luego pide a varios niños que pasen al pizarrón para escribir esas sumas. A continuación ella las ordena en el pizarrón del siguiente modo:

1 + 9 = 10
2 + 8 = 10
3 + 7 = 10
4 + 6 = 10
5 + 5 = 10
6 + 4 = 10
7 + 3 = 10
8 + 2 = 10
9 + 1 = 10

Pregunta ahora a los niños qué encuentran en estas sumas que les llame la atención. Los niños afirman que los números "suben y bajan". La docente pide que aclaren esto. Un alumno dice : "Mire seño 1; 2; 3; ....10" mientras señala de arriba hacia abajo, los sumandos que están en primer lugar y hace lo mismo pero de abajo hacia arriba con los sumandos que están en segundo lugar.
Otros niños dicen. "todas dan 10". Otros muestran las mismas sumas "dadas vueltas". Es el caso de 1 + 9 y 9 + 1; 2 + 8 y 8 + 2; etc.

Institucionalización

A partir de las reflexiones y conclusiones anteriormente citadas por los alumnos, se concluye que:
Las sumas que dan diez son 1 + 9 ; 2 + 8, etc. Se pide a los niños que las copien en sus cuadernos dispuestas tal como están en el pizarrón. Esto facilitará su aprendizaje ya que permite visualizar las regularidades.
Hay sumas que dan el mismo resultado y también usan los mismos números como 1 + 9 y 9 + 1 ; etc. (Aquí se está acordando acerca de la conmutatividad de la adición).
Hacemos notar la importancia de registrar los acuerdos de los niños en sus cuadernos ya que ese es el elemento que usan para estudiar, para comunicarse con el hogar en términos de aprendizajes dados, y para retomar más adelante como conocimientos adquiridos en nuevas situaciones.

Variantes de la situación

Modificando los números de las cartas se pueden trabajar otras combinaciones aditivas como por ejemplo

- sumas de dobles en primero,
- sumas de decenas exactas,
- sumas de centenas exactas en segundo,

entre otras. Queda en Ud. Lector pensar en estas modificaciones para llevar adelante el juego.

Para ganar hay que embocar (2).
(Segundo grado).

Este juego ya ha sido presentado en el libro Numeración ¿Querés que te cuente? – M. Pujadas y L. Eguiluz, para trabajar con valor posicional de la decena . Esta es una variante del mismo para presentar el algoritmo de la adición.

Reglas del juego

El docente coloca en cada mesa una caja con un cartel que dice 100, otra con un cartel que dice 10 y otra que dice 1.

Los niños en grupos de 4 juegan a embocar pelotitas, corchitos o cualquier otro objeto en la caja. Para ello, sacan dos cartones de una caja con números de dos cifras (que no sean redondos).

57	**28**	**42**	**84**

Deben anticipar cuántas bolitas hay que embocar en cada caja, para obtener el puntaje total que les otorgan los dos cartones extraídos. Si anticipan correctamente y aciertan luego en la caja se quedan con dichos puntos y ganan la partida. Condición: no se puede embocar más de 9 en cada caja.
Uno de los integrantes es el secretario que completará la planilla y hará de juez, anotando los puntajes obtenidos. Para ello cuenta con una planilla como la siguiente.

Nombre	Cartones		Dice que debe embocar			Puntaje
	1º cartón	2º cartón	Caja de 100	Caja de 10	Caja de 1	

Conocimientos previos de los alumnos

- Hacen descomposiciones aditivas como:

257 = 200 + 50 + 7
257 = 2c + 5d + 7u (esta descomposición la conocen pues, valor posicional de unidad, decena y centena es un contenido dado).

- Resuelven operaciones de adición con cálculo reflexionado como por ejemplo:

54 + 27 =
50 + 20 = **70**
4 + 7 = **11**
70 + 11 = 81
entonces 54 + 27 = **81**

Variables didácticas

✓ Los números de los cartones son de dos cifras no redondos, ya que es en estos casos donde cobra sentido la enseñanza del algoritmo.
✓ La condición del juego: no se permite embocar más de 9 en cada caja, permite hacer la relación: valor de cada cifra – escritura del numeral (puntaje).
✓ La tabla permite relacionar los sumandos con el resultado. También permite relacionar cada cifra del resultado con su valor posicional correspondiente.

Investigación

Grupo 1
Juan Pablo extrae las cartas 38 y 42. Suma aplicando cálculo reflexionado.
38 + 42 =
30 + 40 = 70
8 + 2 = 10
Da 80
El secretario, por indicación de Juan Pablo, coloca en la tabla 8 en "Caja de 100" y 0 en "Caja de 10".
José (que jugaba con Juan Pablo) dice: *¡No, está mal! Son 8 en el 10 y 0 en el 1 porque son ochenta. Ahora no podés tirar, perdiste.*
Grupo 2

María saca 47 y 25.
40 + 20 = 60
7+ 5 = 12
María (dirigiéndose al secretario): - *Poné 12 en el 1 y 6 en el 10.*
El secretario le dice que no puede anotar 12 en el 1(por la regla del juego).
Luciana, su compañera de juego dice: - *perdió, ahora me toca a mí.*

Luciana saca 15 y 53
Luciana (dirigiéndose al secretario): - *Son 6 en la caja de 10 y 8 en la caja de 1.*
María: *¿y cómo lo hiciste?*
Luciana: *Sumé el 1 y el 5 que son los de la caja de 10 y el 5 y el 3 que son los de la caja de 1.*
María: *Si yo hice lo mismo y perdí.*
Luciana: *Te faltó. Mirá (busca lo registrado en la tabla para María), tenés 12 en la de 1 y con esos hacés un diez y ponés 2 en la caja de 1 y ese 10 con los otros 6 que tenías van a ser 7.*
María: *Hagamos otra vuelta.*
Luciana y Secretario: *Bueno.*
María saca 37 y 18
María hace 37 + 18
30 + 10 = 40
7 + 8 = 15
40 + 10 = 50
Son 55, 5 en la de 10 y 5 en la de 1.
Observemos cómo luego de la interacción grupal, María puede llevar adelante este problema con éxito.

Grupo 3
Héctor saca 24 y 82.
Héctor: *Son 6 en el de 1 y 10 en el de 10...esperá, esperá, no anotés. 10 no puedo poner. 10 en la caja de 10 es lo mismo que 1 en la de 100. Anotá 1 en la de 100, ninguno en la de 10 y 6 en la de 1.*
Martín: *No, no, esperá eso no entiendo. Son 6 en la caja de 1 y 20 + 80 = 100. ¿Y ahora?*
Secretario: *Ya sé. Ese 100 es 1centena. Por eso se pone 1 en la de 100 y 6 en la de 1.*
Martín: *No entiendo.*
La docente interviene diciendo: *que ahora juegue Martín.*
Martín saca 35 y 43.
Martín. *Son 70 ....7 en la de 10 y son 8........8 en la de 1.*
Docente (dirigiéndose a Martín): *En 70 ¿cuántas decenas hay?*
Martín: *7*
Docente: Ahora vuelvan a pensar todos en lo que hizo Martín y Jere(el secretario).
La docente pasa a observar otro grupo y los chicos siguen discutiendo y reflexionando.

Grupo 4
Anabella saca 56 y 17
Anabella: Son 6 unidades y 7 unidades entonces son 13 unidades. Pongo 9 (por la regla del juego) y me quedan 4. (Anabella piensa qué hacer ahora con esas 4 unidades y no sabe donde ubicarlas. El secretario la quiere ayudar y le dice : *empezá por los dieces.*
Anabella: Son 6 dieces, 6 decenas. Poné 6 (señalando en la tabla el lugar de las cajas de 10). Son 13 en la caja de 1, pero no los puedo poner. Ahhhh! Tengo un diez más, poné 7 en la caja de 10 y 3 en la de 1.

Puesta en común

La docente recupera distintos momentos del juego en los grupos. Los secretarios muestran las tablas de sus respectivos grupos y comentan a pedido de la docente algunas de las cuestiones que se plantearon en el juego, como las que se describieron en la fase de investigación.
Cuando se le pregunta a Juan Pablo (Grupo 1) porque puso 8 en el de 100 dijo que en el 80 primero está el 8 y en la tabla primero están Cajas de 100. A esta altura de la clase Juan Pablo ya había solucionado su error, pues habían jugado ya varias rondas y los chicos de su grupo se habían encargado de discutir con él para que viera cómo se hacía.
Surgen interesantes comparaciones de procedimientos, por ejemplo niños que usaban sumas de dieces (Luciana) y otros que usaban las decenas (Anabella). Se hace referencia también a la relación entre los dieces y la decena , como por ejemplo el problema que se suscitó en el grupo 3 y la intervención de la docente diciendo ¿en 70 cuántas decenas hay?.
La docente orienta la reflexión de la puesta en común con preguntas como:
¿Cómo resolvieron el problema de anotar en la tabla números menores que 10?
Si obtiene más de 9 en la caja de 1 ¿cómo anotan?
Si obtienen más de 9 en la caja de 10, por ejemplo 16 ¿cómo anotan?
Todas estas reflexiones llevarán a formular los acuerdos que figuran a continuación.

Institucionalización

Si hay más de 10 en la caja de 1, se forma una decena que se suma con las que ya había.
Si hay más de 10 en la caja de 10, se forma una centena.
La docente interviene entonces escribiendo el algoritmo de la adición, mostrando la relación entre lo que los niños hicieron en el juego, el registro de la tabla donde se ve la vinculación entre los sumandos, el resultado y la técnica del algoritmo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 38 \\ +\,42 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ +\,82 \\ \hline 106 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 56 \\ +\,17 \\ \hline 73 \end{array}$$

Variantes

Le dejamos a Ud. lector el desafío de adaptar esta situación al caso de tener que enseñar el algoritmo de la sustracción.

Ejercitación

Este juego es una sugerencia para ejercitar este tema, sobretodo los canjes de 10 por 1, indispensables para resolver el algoritmo.

El mago: Mucha plata con pocos billetes

Cartas con números de dos cifras, no nudos. Se pueden usar de tres cifras, para trabajar en otro momento del aprendizaje de este tema.
Se reparten 6 cartas entre 3 jugadores. Cada jugador tiene en a su disposición monedas de $1, billetes de $10 y billetes de $100. Debe juntar tanto dinero como indiquen las dos cartas sin que haya más de 9 de la misma clase. Gana el que consigue más dinero y lo muestra teniendo en cuenta la regla "no puede haber más de 9 de la misma clase".

Te quiero preguntar una cosa (tercer grado)

La clase se divide en grupos de 2 o 3 integrantes cada uno.
El docente reparte tarjetas con el siguiente enunciado.

> El papá de Javier trabaja en el "Parque Diverti-2". Nos contó cuánto dinero se recaudó este domingo en algunos juegos.
> Mambo: $120 por la mañana, y $350 por la tarde.
> Martillo: $ 55 por la mañana y $200 por la tarde
> Tren Fantasma: $47 por la mañana y $100 por la tarde.
> El papá de Javier al mediodía se llevó $85 para pagar algunos gastos de mantenimiento.

Los niños deben formular una pregunta que se responda haciendo alguna de las siguientes cuentas.

A continuación entrega otras tarjetas con cuentas diferentes para cada grupo. (Algunos grupos tendrán las mismas cuentas, dependiendo de la cantidad de grupos que se formen).
Las cuentas que figuran en estas tarjetas son:

120 + 47 + 55 =	**120 – 85 =**	**350 – 120 =**	**120 + 55 + 47 – 85 =**

Una vez que cada grupo formuló la pregunta se intercambian las mismas y los grupos que reciben la pregunta deben adivinar cuál fue la operación que figura en la tarjeta del grupo que emitió dicha pregunta.

Conocimientos previos

- Sentido de los problemas de adición y sustracción: composición de medidas, transformaciones y relaciones.
- Los problemas de relaciones son resueltos con procedimientos de sobreconteo o adición. Los niños tiene dificultad de reconocer la sustracción en este tipo de problemas.
- Cálculo reflexionado y algorítmico para sumas y restas.

Variables didácticas

- ✓ Los números elegidos permiten hacer cálculos rápidos ya que el objetivo de la actividad es trabajar el sentido de las operaciones de adición y sustracción.
- ✓ El problema tiene muchos datos, algunos de más. Esto lleva a una selección de los mismos antes de formular la pregunta.
- ✓ Hay cálculos con más de un término. Esto hace más compleja la interpretación del sentido de las operaciones involucradas.

Investigación

Los niños deben analizar los datos, seleccionándolos de acuerdo a la operación entregada y luego formular la pregunta.
El equipo de Camila y Mili recibe 120 + 47 + 55 y escriben
¿Cuánta plata se juntó en el parque a la mañana?
Jere y Daniel que reciben la misma cuenta escriben
¿Cuánto se juntó en total?

Equipos que recibieron 120 + 47 + 55 – 85

Javier y Marina: *De lo que se juntó a la mañana se gastó $85. ¿Cuánto le quedó al papá?*
Lourdes y Jazmín: *¿Cuánta plata queda a la mañana?*
Martín y Luciano:*¿Cuánto se llevó el papá?*
Lucas y Antonio no pudieron formular la pregunta. La docente intervino pidiendo que escribieran en el papel qué representa cada número en el problema. Pusieron
$120 por la mañana Mambo.
$55 por la mañana Martillo.
$47 por la mañana Tren Fantasma
$85 para pagar alguno gastos.
Como no formulan la pregunta la docente cambia la cuenta por 120 + 47 + 55 . En este caso escriben: *Si se suma lo de la mañana ¿Cuánto da?*

Equipos que recibieron 350 – 120
Eli y Juli: *¿Cuánto juntó por la mañana menos que por la tarde?*
Fer y Natu: *¿Cuándo juntó más?*
Ariel y José: *¿En el Mambo se juntó cuánta plata más por la tarde que a la mañana?*

Puesta en común

Las intervenciones docentes están dirigidas a reflexionar sobre las mejores formas de comunicarse para que los equipos receptores logren con éxito adivinar la operación.
Las preguntas de Jer y Daniel, Javier y Marina, Lourdes y Jazmín, Eli y Juli, Fer y Natu, debieron formularse nuevamente.
La pregunta de Ariel y José se interpretó como 350 + 120. Se reflexionó acerca del significado de ¿cuánto más? y ¿cuánto menos?, preguntas éstas relacionadas con los problemas de relaciones en la clasificación del Dr. Vergnaud.
La de Ariel y José y las nuevas preguntas de los restantes equipos que fueron reformuladas se prestaron para acordar cómo expresarse de la mejor manera posible.
La pregunta de Martín y Luciano fue interpretada por el equipo receptor como 120 + 47 + 55. Aquí se reflexionó sobre cómo comunicar la sustracción presente en la cuenta dada. Martín y Luciano defendían su pregunta pues afirmaban que *"al final el papá se llevó lo que queda luego de sumar 120 + 47 + 55 y restar 85"*. El equipo receptor afirmaba que se podía entender que lo que se llevó el papá es la suma de lo recaudado por la mañana. Quedó en manos de los dos equipos mejorar la comunicación para este caso ya que con la pregunta formulada se podía interpretar como una suma de lo recaudado a la mañana y no la sustracción, luego de haber pagado. También se comparó con otras preguntas como por ejemplo la de Javier y Marina.

Institucionalización

Se acuerda con los niños que:
- ✓ La palabra "más" no siempre significa que debemos sumar.
- ✓ La palabra "menos" no siempre significa que debemos restar.
- ✓ Debemos tener en cuenta los datos para hacer la pregunta. Si falta alguno la pregunta no se entiende. (Recordar preguntas de Lourdes y Jazmín o la de Fer y Natu, entre otras.)

Dinosaurios de película (para cuarto o quinto grado)

Esta situación ha sido pensada para trabajar el sentido de la sustracción en problemas ligados a la magnitud tiempo, que hemos optado por llamar problemas de "tiempo transcurrido".
Se sabe que los niños alrededor de los 10 años se enfrentan a problemas, generalmente ligados a las Ciencias Sociales, como por ejemplo calcular la edad que tenía tal o cual prócer al morir, dado su año de nacimiento y su año de fallecimiento, a bien problemas donde deben calcular años transcurridos entre un suceso y otro. En

general los niños de esa edad no advierten que dichos problemas pueden ser resueltos con una sustracción y los docentes requieren ese procedimiento cuando el alumno no ha podido construirlo aún. Este es el propósito con el que se presenta "Dinosaurios de película."

Problema

¿Sabían que el cine ha producido una gran cantidad de películas de dinosaurios? Aquí tienen algunos datos interesantes:

- ➢ El primer film sobre dinosaurios fue *The Prehistoric Peeps*, en el año 1905.
- ➢ En el año 2.000 se estrenó *Dinosaurio*, una película de Disney.
- ➢ Entre 1.905 y el 2.000 encontramos varias películas del mismo tema. ¿Tuvieron oportunidad de ver algunas?. Aquí van:

Baby, el secreto de la leyenda perdida.	1.985
Cavernícola	1.982
Cuando los dinosaurios dominaban la tierra	1.970
El mundo animal	1.956
El mundo perdido	1.925
Jurassic Park (de Steven Spielberg)	1.993
Las tres edades	1.923
La tierra olvidada por el tiempo	1.975
Pie pequeño, en busca del valle encantado	1.988
Un millón de años antes de Cristo	1.966

- Laura y Francisco fueron a ver el estreno de *Dinosaurio*. Francisco nació en 1.992 y Laura en 1.983. ¿Cuántos años tenían Laura y Francisco cuando vieron *Dinosaurio*?
- Los papás de Laura y Francisco les contaron que ellos vieron el estreno de *Cuando los Dinosaurios dominaban la tierra*. El papá nació en 1.960 y la mamá en 1.961. ¿Cuántos años tenían cuando vieron esa película?

☺☺¿Cómo hicieron estos cálculos? Luego de conversar con los compañeros vuelquen en este cuadro la información de los problemas:

Integrante de la familia	Año en que vio la película	Año en que nació	Edad que tenía cuando vio la película

- El abuelo de Francisco nació en el año 1937. El siempre cuenta que vio la película *Baby, el secreto de la leyenda perdida*, el año del estreno. ¿Cuántos años tenía el abuelo de Francisco el año que vio esa película?

- La abuela de Francisco siempre le dice al abuelo: ¿Te acordás que en el viaje de bodas estaban estrenando *El mundo animal* y la fuimos a ver juntos?. El abuelo le contesta: - No vieja, hacé memoria. Cuando dieron esa película no estábamos casados.-
- ¿Quién tendrá razón? La abuela de Francisco cumplió 53 años el 15 de septiembre del año 2.000.
- ¿Cuál es la diferencia de edad de los abuelos de Francisco?
- La abuela nunca se perdía los estrenos de las películas de dinosaurios ¿Qué películas habrá visto la abuela cuando tenía entre 20 y 30 años?

Completen el cuadro con los problemas de los abuelos.

Integrante de la familia	Año en que vio la película	Año en que nació	Edad en que vio la película

Conocimientos previos

- Comparación de números de 4 cifras. Relación entre sucesión en el tiempo y orden de los números.
- Recta numérica para la representación de números naturales.
- **Sentido de la adición y sustracción**: resolución de problemas de producto de medidas, transformaciones y relaciones.
- **Cálculo**: reflexionado y algorítmico para adición y sustracción.

Problemas que involucren datos de más en sus enunciados.

Variables didácticas

✓ Los números que aparecen en la primera tabla, vinculados a cada sustracción, son redondos y /o poco distantes uno de otro. Así es el caso de 2.000 y 1.992; 2.000 y 1.983; 1.970 y 1.960; 1.970 y 1.961. Esto permite procedimientos de los niños ligados al cálculo reflexionado y/o memorizado.

✓ Los números 1.985 y 1.937 que aparecen en la segunda tabla están ligados más bien al cálculo algorítmico.

✓ La organización de los números en la tabla presentada, permite visualizar minuendo, sustraendo y diferencia, en ese orden, para poder descubrir qué operación los relaciona.

✓ Problema con gran cantidad de datos que los alumnos deberán seleccionar antes de comenzar a calcular.

Investigación y Puesta en común

Para completar la primera tabla los niños usaron procedimientos como:

A partir del año de nacimiento contar de uno en uno hasta llegar al año de la película. Por ejemplo José dijo “1.992; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 99; 2000” acompañando este recitado con los dedos.

Conteo de 10 en 10. Lucas dijo “1.960 al 70 son 10”

A partir del año de nacimiento sumar el número que falta hasta el año del estreno de la película.
Antonella dijo "1.992 y 3 son 1.995 y 5 son 2.000. Da 8."

Luego de completar la primera tabla hay una primera instancia de la puesta en común donde la docente pide a los niños que analicen los números involucrados en cada problema y digan qué operación permite relacionar los datos del problema con la incógnita del mismo. Los niños descubren que es la sustracción.
Para algunos problemas relacionados con la segunda tabla los niños analizan que los procedimientos empleados en la primera tabla son poco prácticos y para el caso de los números 1.985 y 1.937 los alumnos ven al algoritmo de la sustracción como un procedimiento más práctico por su economía aunque hay algunos niños como Matías que hizo "1.937 al 40 son **3**; del 40 al 85 son **45**; entonces da **48.**"

Observemos aquí qué importante escuchar los procedimientos empleados y aceptarlos, ya que nadie podría discutirle a Matías que su procedimiento es más económico que el algoritmo de la sustracción, aunque otros niños no tengan esta habilidad para hacerlo así. Nótese también que Matías tiene un gran dominio de cálculo reflexionado, basado en la memorización de resultados y las descomposiciones numéricas.

Institucionalización

Antes de proceder a efectuar cálculos debemos ser cuidadosos en la selección de los datos que emplearemos.
La sustracción es el procedimiento más económico en el caso de resolver algunos de estos problemas de "tiempo transcurrido" . Hay casos donde la adición o el conteo son los más sencillos. Podemos optar por uno u otro dependiendo del caso dado.

Ejercitación

En la ejercitación se contemplan los distintos procedimientos de resolución, el algoritmo es una estrategia más no la única, y el cálculo reflexionado no desaparece porque ya se sabe el algoritmo, sino que los niños deben optar según el que crean más conveniente.
La actividad b) relaciona este tema con otro dado previamente que es la representación de naturales en la recta numérica. Así los niños visualizan el concepto de distancia entre números naturales, en relación a la magnitud tiempo. (Nótese la relación entre este contenido y la línea de tiempo usada habitualmente en Ciencias Sociales). ¿Se estará teniendo en cuenta esta articulación de contenidos entre las dos áreas?

a)¿Qué edad tenía alguno de sus papis o algún familiar cuando se estrenó *Jurassic Park*?
Hagan el cálculo para dos de ellos, por lo menos. ¿Qué cálculo les pareció más conveniente usar?

b)Ya hemos visto que la recta numérica es una herramienta muy útil en la resolución de problemas. Úsenla para representar la información consignada en los cuadros.

De la punta de aquel cerro (para quinto o sexto grado)

El grupo de escaladores "Nos vamos para arriba" ha desafiado al grupo de escaladores "Nos veremos en la cumbre". En una de sus primeras conversaciones buscaron información acerca de posibles montañas a escalar. Les despertó curiosidad una información que encontraron acerca de los 10 picos más elevados de América del Sur e hicieron algunas comparaciones respecto de sus alturas.

Picos más altos – América del Sur		
1	Aconcagua	6.959 m
2	Ojos del Salado	6.880 m
3	Cerro Bonete	6.872 m
4	Tupungato	6.872 m
5	Monte Pissis	6.779 m
6	Cerro Mercedario	6.770 m
7	Nevado Huascarán	6.768 m
8	Tres cruces	6.749 m
9	Cerro Llullaillaco	6.723 m
10	Yerupajá	6.634 m

- ¿Cuál es la diferencia de altura entre el pico más elevado y el menos elevado?
- ¿A que país pertenece el pico más elevado? ¿Qué diferencia de altura hay entre el Aconcagua y el pico más alto del mundo?
- ¿Cuáles son los dos picos que tienen la menor diferencia de altura? ¿Cómo los descubrieron? Describan el procedimiento que emplearon.
- ¿Qué procedimiento creen que es el más económico para calcular la diferencia entre los picos Ojos de Salado y Tupungato?

Conocimientos previos

Los niños han trabajado anteriormente con problemas con datos de más. Conocen diferentes clases de problemas de adición y sustracción.
Calculan con estrategias de cálculo reflexionado, algorítmico y usan la calculadora.

Investigación y variables didácticas

Respecto a la primera pregunta prácticamente ningún niño tuvo dificultad, reconocen rápidamente el problema como de sustracción y aplican el algoritmo.
Para la segunda pregunta el inconveniente que presenta es la falta de un dato (variable didáctica). Algunos niños pensaban que ellos no lo entendían y otros recurrieron a la docente por éste. Salvado el inconveniente (la docente les entrega algunos libros que había traído de la biblioteca para que lo busquen) los niños lo resuelven sin dificultad. Obsérvese en este caso la intervención docente que deja primero a los alumnos enfrentarse al problema y luego entrega el material bibliográfico, pero no es ella la que proporciona el dato faltante sino la posibilidad de buscarlo. Esto lleva tiempo, sí, pero es el tiempo que un niño necesita para considerarse luego autónomo frente a la resolución de sus problemas.
Para la tercera pregunta los procedimientos son variados.

- Un par de niños decide hacer una a una las sustracciones con cada uno de los números y los restantes *¿Calculó el lector cuántas son?*. Este grupo de niños se cansa y no termina. El trabajo se les desorganiza y pierden el control respecto de las cuentas ya resueltas y las que faltan resolver.
- Otros advierten que las cuentas a resolver son las de números dispuestos en la tabla de forma consecutiva. Realizan esos cálculos, algunos mentales y otros con el algoritmo y luego dan respuesta el problema.
- Otro grupo observa los números y se ve "atraído" visualmente por 6.779 y 6.770 (variable didáctica). Fíjese el lector que las tres primeras cifras se repiten y la única que cambia es la cifra de las unidades. Además en uno de los números esta cifra es cero(variable didáctica) lo que facilita el cálculo, que lo hacen mentalmente.
- Otros niños buscan al azar números que parecen ser los más cercanos, como 6.880 y 6.882; 6.779 y 6.770; 6.770 y 6.778; 6.749 y 6.723. Luego deciden la respuesta.
- Un error fue el de considerar como menor la diferencia entre 6.800 y 6.779 (variable didáctica) afirmando que es 1, pues veían a la terminación 800 como 80.

Puesta en común

Todos estos procedimientos son puestos a consideración de los alumnos: las discusiones se orientan en dos cuestiones que son la economía de estrategias (hacer todas las sustracciones versus hacer solamente algunas) y el procedimiento de cálculo empleado (reflexionado o algorítmico).

Institucionalización

Los acuerdos logrados son:

- Cuando resolvemos problemas muchas veces debemos acudir a otras fuentes en busca de información, si la que se nos proporciona no es suficiente.
- No toda la información proporcionada se usa en la resolución de un problema, es necesario seleccionar datos.
- Conviene elegir el procedimiento de cálculo que más conviene de acuerdo a los números empleados. Por ejemplo para restar 6.959 y 6.634 conviene el algoritmo, para 6.770 y 6.768 decimos 2 sin necesidad de efectuar el cálculo y para 6.749 y 6.723 una estrategia rápida es 6.723 más **20** es 6.743, más **6**; 6.749. Da **26.**

Operaciones con números naturales en el nivel inicial

- Transformaciones que afectan la cardinalidad agregar, reunir, repartir, quitar, separar).

Operaciones con números naturales en primer ciclo

1° grado	2° grado	3° grado
▪ Transformaciones que afectan la cardinalidad de una colección (unir y separar, agregar y quitar, comparar). ▪ Expresión simbólica de las acciones realizadas: signos +, -, = .	→	→
▪ Utilización de criterios cardinales para el cálculo de sumas y restas de números naturales por lo menos de hasta dos cifras.	▪ Utilización de criterios cardinales y las leyes del sistema de numeración posicional decimal para el cálculo de sumas y restas de números naturales por lo menos de hasta tres cifras.	▪ Utilización de las leyes del sistema de numeración posicional decimal para el cálculo de sumas y restas de números naturales por lo menos de hasta cuatro cifras.
▪ Lectura e interpretación de problemas con enunciados orales, escritos o gráficos. ▪ Selección de la operación y resolución de problemas de suma y resta de números naturales.	→	→
▪ Conceptualización y asimilación de las combinaciones aditivas básicas		→
▪ Elaboración de enunciados que se correspondan con combinaciones aditivas básicas dadas	▪ Elaboración de enunciados que se correspondan con operaciones de adición o sustracción dadas.	
▪ Confección de tablas de adición y sustracción a fin de explorar regularidades.	→	→
	▪ Identificación de la adición y la sustracción como operaciones inversas y su uso para resolver problemas.	

1° grado	2° grado	3° grado
▪ Cálculo mental y escrito, exacto y aproximado utilizando sumas y restas. Ejemplos: a+b=10; 10–a=b; a–b=1; a+a con a dígito; adiciones con resultado 10, 20,..., 100,...; restas con minuendo 10; complementos a 10, a 20,..., a 100; encuadramiento de números entre decenas, etc.	▪ Cálculo mental y escrito, exacto y aproximado utilizando sumas y restas. Ejemplos: restas de la forma a–b=10; sumas de la forma 100+a=b y restas de la forma 100–a=b con a múltiplo de 10; adiciones con resultado 100, 200,..., 1000,...; complementos a 100, a 200,..., a 1000; encuadramiento de números entre decenas, centenas, unidades de mil, etc. (Ej. 290 > 288 >280, 400 < 407 < 410, ... etc.)	▪ Cálculo mental y escrito, exacto y aproximado utilizando sumas y restas. Ejemplos: adiciones con resultado 1.000, 2.000,..., 10.000 restas con minuendo 10.000 - complementos a 1.000, a 2.000,..., a 10.000 - encuadramiento de números entre decenas, centenas, etc. (Ej. 900 > 884 >800, 4400 < 4487 < 4500, ... etc.)
▪ Resolución de ecuaciones simples de suma y resta		
	▪ Construcción de algoritmos para la suma de números de hasta tres cifras ▪ Construcción de algoritmos para la resta, con desagrupación en un solo orden, de minuendos menores que 1.000. ▪ Cálculo exacto y aproximado (mental y escrito) de sumas y restas por distintas estrategias: tanteo, redondeo, cambio de orden de las operaciones, etc.	▪ Construcción de algoritmos para la suma de números de hasta cuatro cifras ▪ Construcción de algoritmos para la resta, con desagrupación en cualquier orden, de minuendos menores que 10.000. ▪ Cálculo exacto y aproximado (mental y escrito) de sumas y restas por distintas estrategias: tanteo, redondeo, cambio de orden de las operaciones, etc.

4° grado	5° grado	6° grado
▪ Sumas y restas de múltiplos de 10, 100, 1000, etc. ▪ Resolución de situaciones problemáticas que impliquen el uso de las operaciones de adición y sustracción con números naturales. ▪ Elaboración, utilización y fundamentación de distintas estrategias de cálculo exacto y aproximado (reflexionado o no, oral, escrito y con calculadora). ▪ Estimación del resultado de un cálculo y valoración de la razonabilidad de los resultados antes y después de efectuados. ▪ Selección y simbolización de la operación aritmética correspondiente a la situación problemática presentada. ▪ Elaboración de enunciados que se corresponden con operaciones aritméticas dadas. ▪ Identificación y utilización de operaciones inversas para resolver problemas. ▪ Investigación de las propiedades de cada operación a través del análisis de sus tablas. ▪ Distinción de datos e incógnitas y las relaciones entre ellos, en las situaciones problemáticas planteadas. Resolución de ecuaciones sencillas con números naturales.	Idem	Idem

Los contenidos de adición y sustracción de números naturales para 5° y 6° grados son los mismos que para 4° pero con la consideración del rango de numeración propios de cada grado.

La adición y la sustracción como objeto de saber

La adición y la sustracción como objeto de saber

La adición de números naturales

En los capítulos anteriores nos referimos al sentido y al cálculo para adición y sustracción, esbozamos su desarrollo histórico, nos informamos acerca del desarrollo de su conceptualización en los niños y vimos su tratamiento en los primeros ciclos de la escolaridad.
En este capítulo nos proponemos profundizar algunas cuestiones matemáticas. Una vez definidos los números naturales (ver *Numeración. ¿Querés que te cuente?*) se pasa a definir la adición de números naturales, se estudian las propiedades de esta operación y luego se hace lo mismo con la sustracción.

Desde el enfoque axiomático de Peano

A cada par ordenado de números naturales (a;b) por la adición se le asigna un número natural c que llamamos su suma y denotamos por $a + b = c$. ¿Qué propiedades definen la adición de números naturales?. Cualesquiera sean los números naturales a y b se cumple:

i. $a + 1 = \text{sig } a$
ii. $a + \text{sig } b = \text{sig } (a + b)$

Para afianzar

Demuestre que

1. $a + 2 = sig\ (a + 1)$
2. $a + 3 = sig\ (a + 2)$
3. *¿A qué será igual a + n con a y n números naturales?. ¿Queda definida la adición para todos los números naturales?*

Como vemos la definición de adición se basa en comenzar por definir la suma de un número natural más 1. La definición se apoya en la relación "ser el siguiente de" que se presentó en el momento de definir número natural axiomáticamente. Una vez definida la suma **a** + 1, se puede deducir **a** + 2, **a** + 3, ... y como es válido para cualquier **a** natural, esto generaliza la definición para todos los naturales.
Este tipo de definición se denomina *definición por recurrencia*.

Desde el enfoque conjuntista

Otra forma de definir la adición es partir de la unión entre conjuntos disjuntos. Sean dos conjuntos **A** y **B** finitos, sin elementos en común (disjuntos) cuyos cardinales son **a** y **b**, se define la suma como el cardinal de la unión de A y B

$$\mathbf{a+b = card\ A + card\ B = card\ (A \cup B)}$$

Para afianzar

4. *¿Por qué hace falta que A y B sean disjuntos?*

¿Qué propiedades tiene la adición de números naturales?

Definida la adición de números naturales por cualquiera de los enfoques anteriores se demuestra que posee las siguientes propiedades[1] :

1. asociativa

$$\forall\, a, b, c \in N : (a + b) + c = a + (b + c)$$

2. conmutativa

$$\forall\, a, b \in N : a + b = b + a$$

3. cancelativa

Con respecto a esta última propiedad diremos que consiste en que si, en los dos miembros de una suma, aparece el mismo sumando, el mismo puede cancelarse. Simbólicamente:

$$\forall\, a \in N : a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

Si consideramos el conjunto N_0 no sólo se cumplen las propiedades anteriores sino que aparece otra propiedad[2]:

4. existencia de elemento neutro

$$\forall\, a \in N_0 : a + 0 = 0 + a = a$$

La sustracción de números naturales

Dados dos números naturales **a** y **b** vimos que su suma **c** (**a+b = c**) siempre existe y es única. ¿Qué sucede si nos dan **a** y **c**?. ¿Existirá **b**?. Con varios ejemplos nos bastará para analizar tal situación.

Si consideramos 5+ b = 9 vemos que existe tal número natural b y es 4.

Si consideramos 5+ b = 3 vemos que no existe tal número natural b pues de existir contradiría la definición de suma (por cualquiera de ambos enfoques).

Lo expuesto nos lleva a aceptar que b puede o no existir.

Dados dos números naturales **a** y **c** definimos como resta de **c** y **a** al número natural **b** (si existe) tal que a + b = c y lo denotamos b = c – a. La operación que a cada par de números les asigna su resta se denomina sustracción.

¿Qué propiedades tiene la sustracción de números naturales?

La sustracción de números naturales no es asociativa ni conmutativa. Si es cancelativa.

Para afianzar

5. *Muestre con un ejemplo que la sustracción no es asociativa.*

[1] Ya han sido presentadas en el capítulo 2

[2] En el caso de la definición axiomática para definir N_0 debemos tomar como axioma i [$\forall\, a \in N_0 : a + 0 = a$]

Ecuaciones aditivas

Las expresiones de la forma a + x = c con a y c números naturales se denominan ecuaciones aditivas. Como vimos en 5.2 estas ecuaciones no siempre tiene solución en N. ¿Qué condición deben cumplir a y c para que exista solución?. La condición es que c sea mayor que a. Si la ecuación se plantea en N_0 la condición es que c no sea menor que a. ¿Y cuál es dicha solución?. Por definición de resta dicha solución es x = c – a. Note lector que no estamos "pasando"sino que estamos aplicando la definición de sustracción.

Para afianzar

6. *¿Son equivalentes las siguientes expresiones?. ¿Por qué?*

✓ La condición es que c sea mayor que a.
✓ La condición es que c no sea menor que a.

7. *En qué casos las ecuaciones siguientes tienen solución en N?. ¿Y en N_o?*
   a) $4 + x = 9$
   b) $5 + x = 5$
   c) $x + 12 = 344$
   d) $97 + x = 97$
   e) $a + x = 18$

Respuestas

1. *a + 2 = sig (a + 1)*
Sabemos que 2 = sig 1 y por lo tanto a + 2 = a + sig 1 = sig (a+1) por axioma ii.

2. *a + 3 = sig (a + 2)*
Sabemos que 3 = sig 2 y por lo tanto a + 3 = a + sig 2 = sig (a+2) por axioma ii.

3. *a + n = a + sig(n-1). Si queda definida para todos los números naturales ya que comenzando desde el primer número natural (1) va definiendo +2, +3, +4, +5 y así siguiendo. Cada suma se define en función de la anterior.*

4. *Con un ejemplo podemos analizar la condición. Sea A el conjunto de las vocales de nuestro alfabeto y sea B el conjunto de las letras de la palabra maestra. El cardinal de A es 5 y el cardinal de B es 6 (¡no hay error!). La unión de ambos conjuntos es el conjunto formado por las letras a, e, i, o, u, m, s, t, r cuyo cardinal es 9. Comprobamos que $5+6 \neq 9$.*

5. *La sustracción de números naturales no es asociativa pues, por ejemplo:*
$9 - (6 - 2) = 5$ y $(9 - 6) - 2 = 1$.

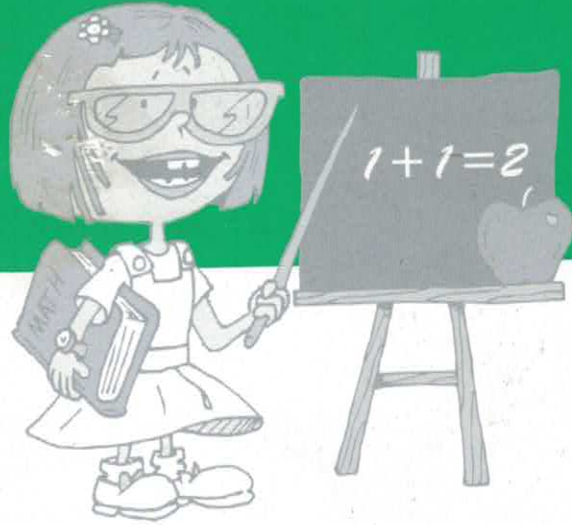
6. *No son equivalentes porque la segunda da la posibilidad de que **c** sea igual a **a**.*

7. *En qué casos las ecuaciones siguientes tienen solución en N?. ¿Y en N_o?*
   a) $4 + x = 9$ *tiene solución en N y en N_o*
   b) $5 + x = 5$ *tiene solución en N_o*
   c) $x + 12 = 344$ *tiene solución en N y en N_o*
   d) $97 + x = 93$ *no tiene solución en N y en N_o*
   e) $a + x = 18$ *tiene solución en N si $a>18$ y en N_o si $a \geq 18$.*

Bibliografía

- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.: **El aprendizaje de las matemáticas**
Editorial Labor (1991)
- Fayol, M.: **Número, numeración, enumeración. ¿Qué se sabe de su adquisición?**
Revue Francaise de Pedagogie N° 70 (1985)
- Gálvez G., Navarro S., Riveros M., Zanocco P.: **Vida, números y formas**
Ministerio de Educación de la República de Chile (1992)
- Gómez Alfonso, B. **Numeración y cálculo**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Gómez, P. Mesa, V.: **Situaciones problemáticas de precálculo.**
Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica (1995)
- Guedj, Denis : **El imperio de las cifras y los números**
Ediciones B, S.A. (1998)
- Ifrah, Georges: **Las cifras. Historia de una gran invención**
Alianza Editorial (1987)
- INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica). ERMEL (Equipo de Didáctica de la Matemática) : **Conocer los números**
Aprendizajes numéricos y resolución de problemas. Curso preparatorio. Hatier. Paris. Marzo 1991
- Kamii, C.: **El número en la educación preescolar**
España. Visor libros. (1984)
- Kamii, C.: **El niño reinventa la aritmética**
España. Visor libros. (1986)
- Kofman, Fredy: **Aprendizaje, saber y poder.**
Leading Learning communities, Inc. (2000)
- Lerner de Zunino, D. **La matemática en la escuela. Aquí y ahora**
Buenos Aires. Aique Grupo Editor (1992)
- Parra, C.; Sadovsky, P; Saiz, I.. **Número y sistema de numeración**
Ministerio de Cultura y Educación. Programa de Transformación de la Formación Docente. (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones**
Buenos Aires. Editorial Paidos (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Los niños, los maestros y los números**
Dirección de currículo, Municipalidad de la Ciudad de Bs. As. (1992)
- Puig,L.;Cerdán,F.: **Problemas aritméticos escolares**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, C. : **Análisis matemático**
Editorial Kapelusz (1969)
- Rico Romero, L.; Castro Martínez, E. y E.: **Número y operaciones**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Sarton, George : **Historia de la Ciencia**
Editorial EUDEBA (1965)
- Vergnaud, G.: **El niño, las matemáticas y la realidad.**
México. Editorial Trillas (1991)
- Vergnaud, G.: **Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?**
Buenos Aires. Editorial Edicial

Ni más ni menos que adición y sustracción



Propuesta para la enseñanza de la adición y la sustracción de números naturales

Las operaciones constituyen uno de los temas de Matemática de Nivel Inicial y EGB que más preocupa a docentes y a padres.
¿Se hizo Ud. alguna vez estas preguntas en relación a su enseñanza?

- ¿Con qué actividad comenzar con la enseñanza de la adición?¿y de la sustracción?
- ¿Conviene que utilicen algún tipo de material para sumar?
- ¿Existe alguna clasificación de los problemas de adición y sustracción que permita una secuenciación en el tratamiento de los mismos?
- ¿Cómo se espera que los alumnos hallen la suma 36+28?
- ¿Conviene que dispongan de procedimientos de cálculo mental?
- ¿Conviene trabajar en el aula algún tipo de actividad con calculadora?

A través de las páginas de este libro encontrará las respuestas a estos interrogantes. Además, sugerencias para distintos años y análisis didácticos de situaciones que lo acompañarán en su implementación en el aula.

Colección Resolver para aprender